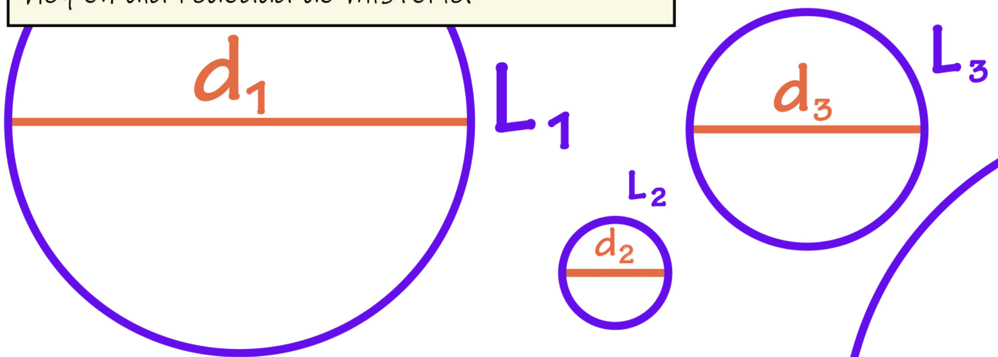
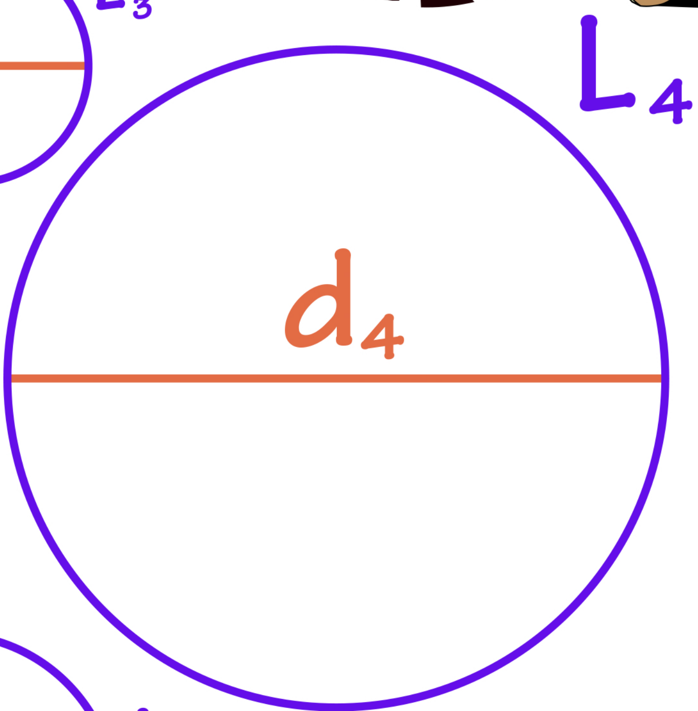
ARQUÍMEDES
Y LA MEDIDA DEL
CÍRCULO

¿Quién descubrió el número π? ¿Lo sabéis? Nuestro protagonista, Arquímedes de Siracusa (287 a. C-212 a. C). Este genio griego fue el primer matemático que tuvo un conocimiento preciso de la existencia del número π.

Arquímedes es sin lugar a dudas uno de los matemáticos más grandes de la historia. Su vida y su obra son de leyenda: Descubrió la ley de la palanca, el principio fundamental de la hidrostática, el volumen de la esfera... ¡Y se anticipó casi 2000 años al cálculo integral!

Murió durante el sitio de Siracusa asesinado por un soldado romano a pesar de la orden de mantenerlo con vida. Su tumba sigue hoy en día rodeada de misterio.

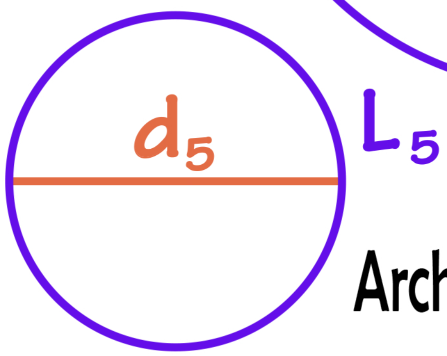




$$\frac{L_1}{d_1}=\frac{L_2}{d_2}=\frac{L_3}{d_3}=\frac{L_4}{d_4}=\frac{L_5}{d_5}$$

Dado que este cociente es siempre el mismo número, para cualquier círculo de perímetro **L** y diámetro **d**, merece un nombre... Y en efecto ¡estamos hablando del número **π** !

$$\boxed{\frac{L}{d}=\pi}$$

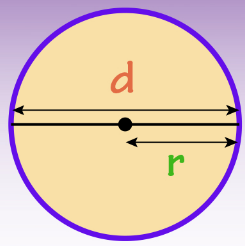


Archimedes' Tub

$$\frac{L}{d} = \pi$$

$$L = \pi d$$

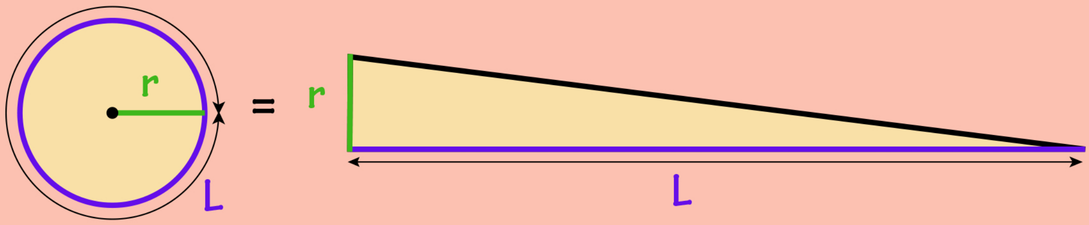
$$L = 2\pi r$$



En efecto, dado que el radio es justamente el doble del diámetro, despejando la longitud L de la definición de **π** obtenemos que el perímetro del círculo es L=2**π**r.

Uno de los resultados probados por Arquímedes y a los que debe su inmortalidad es la fórmula del área de un círculo. Este resultado es la **PROPOSICIÓN 1** de su tratado **"Sobre la medida del círculo"** y lo enunciaba del siguiente modo:

El área de todo círculo es equivalente a la de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es igual al radio y el otro al perímetro del círculo.



De esta Proposición podemos deducir fácilmente una fórmula explícita para el área del círculo:

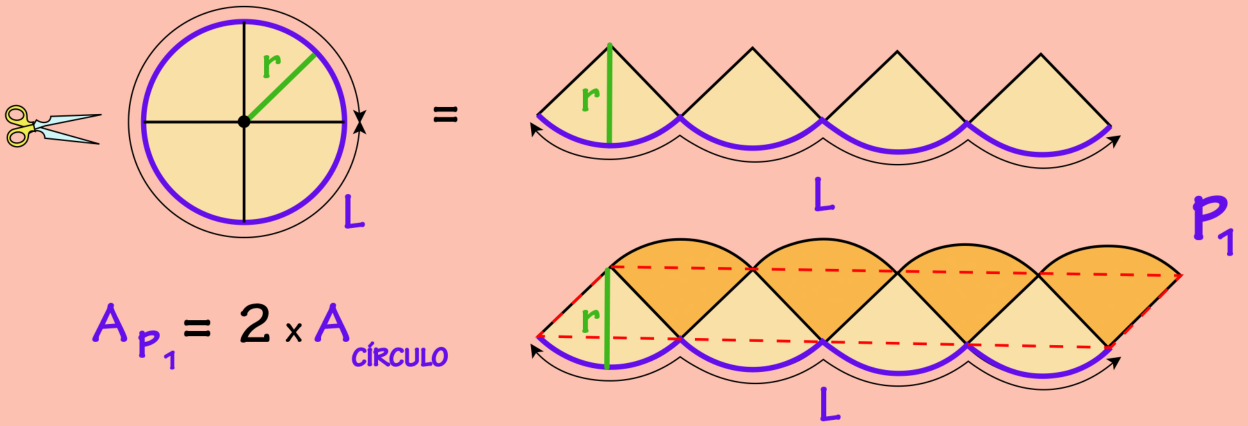
$$A_{\text{CÍRCULO}} = A_{\text{TRIÁNGULO}}$$

$$= \frac{\text{Base x Altura}}{2}$$

$$= \frac{L \times r}{2}$$

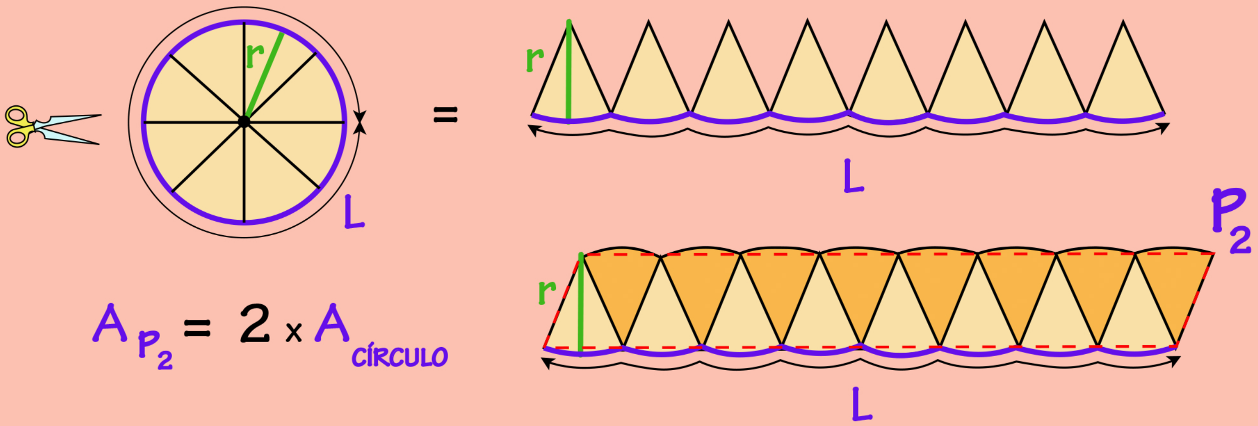
$$= \frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2$$

Podemos cortar el círculo en cuatro porciones iguales. La figura resultante tendrá el mismo área que el círculo original. Si la duplicamos obtendremos una figura P_1 cuya área duplica la del círculo.



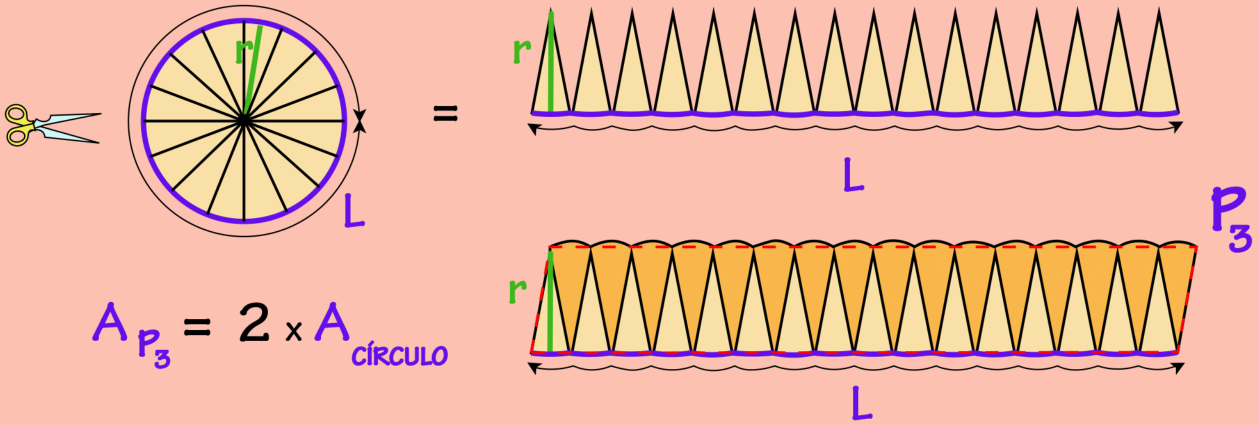
$$A_{P_1} = 2 \times A_{CÍRCULO}$$

La figura P_1 nos recuerda ligeramente a un paralelogramo cuya área si sabemos calcular (Base x altura), pero podemos hacer la misma operación dividiendo el círculo en 8 partes esta vez.



$$A_{P_2} = 2 \times A_{CÍRCULO}$$

De este modo obtenemos una nueva figura que sigue teniendo el doble de área que el círculo original pero de forma que cada vez se parece más a un paralelogramo...

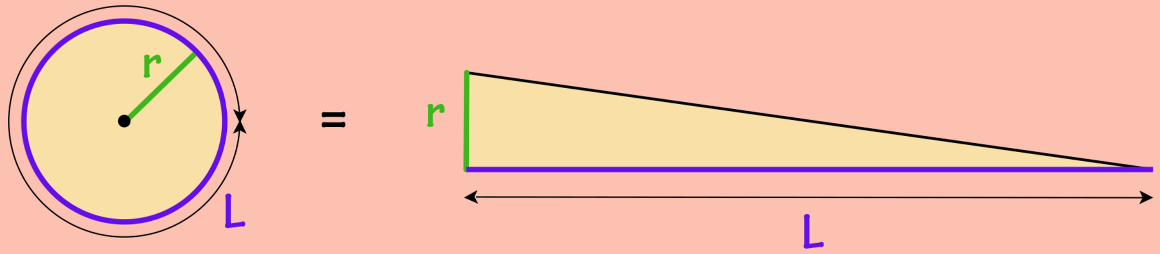


$$A_{P_3} = 2 \times A_{CÍRCULO}$$

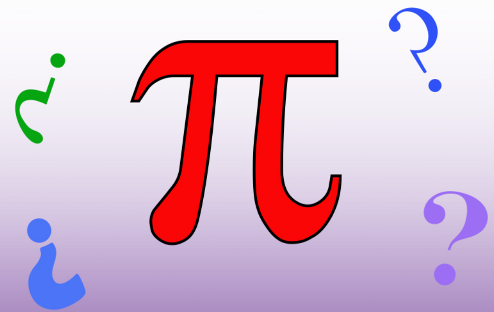
Si dividimos cada vez en más porciones el círculo 4, 8, 16, 32... en el límite la figura resultante sigue teniendo el mismo área que el círculo y al duplicarla obtenemos un rectángulo de base L y altura r. Por tanto, el área del círculo coincide con la de un triángulo rectángulo de base L y altura r.

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P$$

$$A_P = 2 \times A_{\text{CÍRCULO}}$$



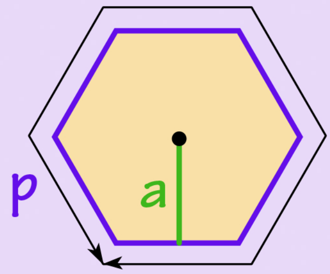
Estas fórmulas dependen de la constante π, pero ... ¿Cuál es el valor de este número? Pues, si no conocemos su valor de poco nos sirven las fórmulas.



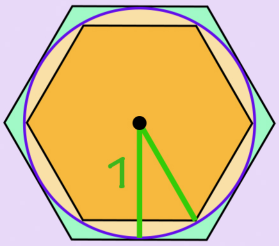
También el genio de Siracusa dio respuesta a esta pregunta en uno de sus resultados más notables. En la **PROPOSICIÓN 3** de su tratado sobre la Medida de Círculo, Arquímedes acota el valor de π. Pero para entender su método recordemos primero la fórmula del área de un polígono regular.

El área de un polígono regular es la mitad del producto del perímetro por el apotema.

$$A_{\text{POLÍGONO}} = \frac{\text{Perímetro} \times \text{Apotema}}{2} = \frac{p \times a}{2}$$



La idea de Arquímedes consistía en partir de un círculo de radio 1, cuyo área es $A = \pi$, y considerar un polígono inscrito en la circunferencia y otro circunscrito.

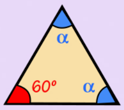


Si denotamos por A_1 el área del polígono inscrito y por A_2 el área del polígono circunscrito, tenemos

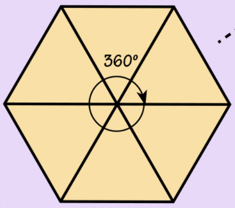
$$A_1 < \pi < A_2$$

Y dado que tenemos una fórmula para el área del polígono regular, podemos acotar el valor de π. Vamos a ilustrar el método de Arquímedes con el **hexágono**.

$$360^\circ \div 6 = 60^\circ \quad (\text{resto } 0)$$

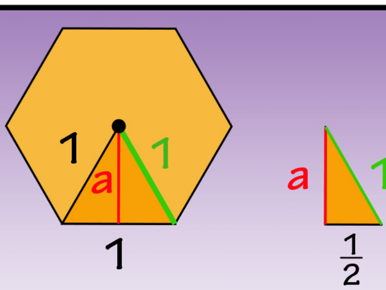


$$60^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ$$
$$2\alpha = 180^\circ - 60^\circ$$
$$\alpha = 60^\circ$$



El hexágono está formado por 6 triángulos equilateros como podemos comprobar.

A_1



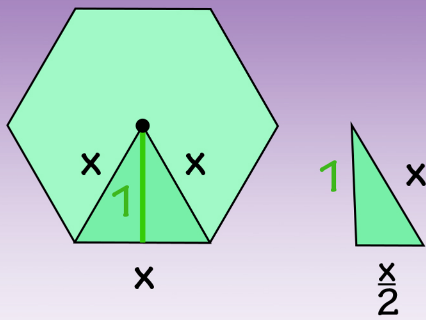
El hexágono inscrito tiene lado de medida **1**, por tanto su perímetro p es **6**.
Para calcular la apotema consideramos el triángulo rectángulo del que conocemos la hipotenusa **1** y un cateto **1/2**. Aplicando el **Teorema de Pitágoras** obtenemos:

$$a^2 + (1/2)^2 = 1^2$$
$$a^2 = 1 - 1/4$$
$$a = \sqrt{3}/2$$

Por tanto el área del hexágono inscrito es:

$$A_1 = \frac{p \times a}{2} = \frac{6 \times \sqrt{3}/2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

A_2



El hexágono circunscrito tiene lado desconocido y apotema de medida **1**. De nuevo por el **Teorema de Pitágoras**:

$$x^2 = 1^2 + (x/2)^2$$
$$x^2 - x^2/4 = 1$$
$$x^2 = 4/3$$
$$x = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$$

Luego el área del hexágono circunscrito es:

$$A_2 = \frac{p \times a}{2} = \frac{6 \times 2\sqrt{3}/3}{2} = 2\sqrt{3}$$

Teniendo en cuenta que $2'598 < 3\sqrt{3}/2$ y que $2\sqrt{3} < 3{,}4642$, llegamos a la conclusión de que el número π se encuentra cmprendido entre los valores:

$$\boxed{2'598 < 3\sqrt{3}/2 < \pi < 2\sqrt{3} < 3{,}4642}$$

La anterior aproximación no resulta muy precisa, pero Arquímedes no se quedó ahí. Hizo cálculos similares a los vistos para los polígonos regulares de 12, 24, 48 y 96 lados, llegando a la asombrosamente precisa acotación:

$$3{,}1412989 < \pi < 3{,}1428265$$