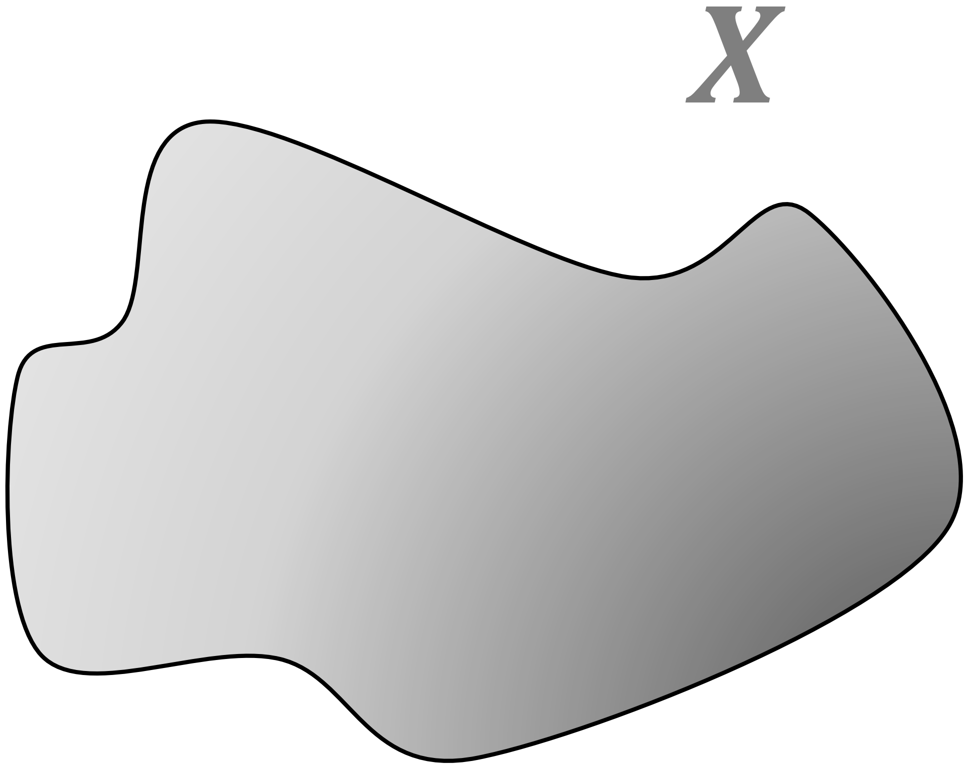
# ¿Qué tienen de especial las relaciones de equivalencia?

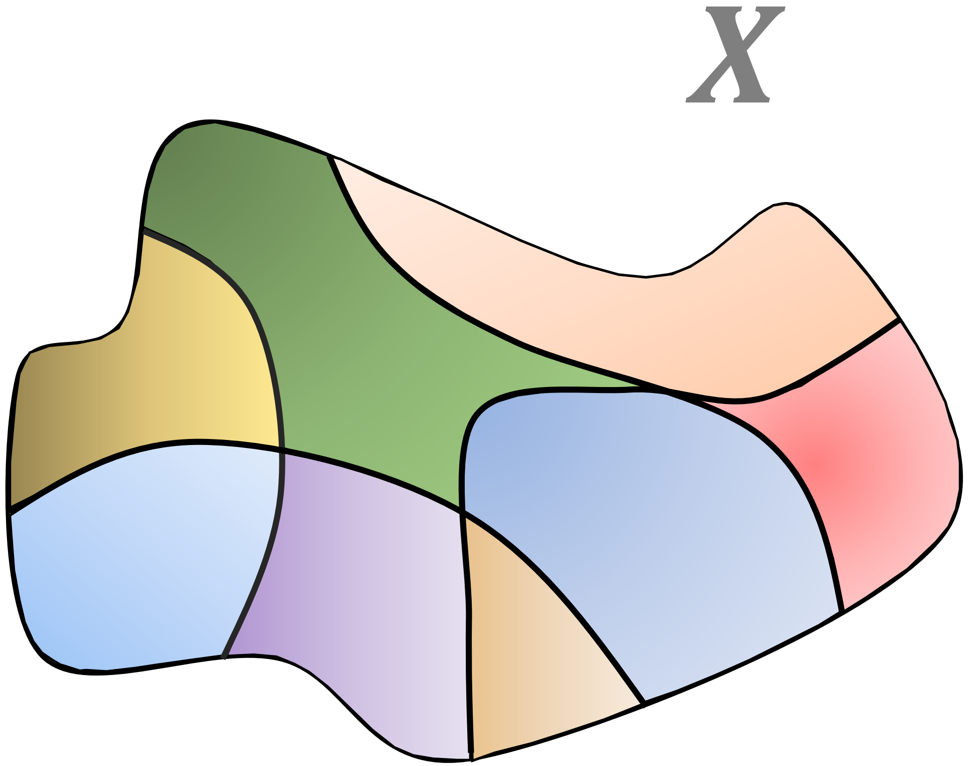
# ¿Por qué van a ser tan importantes?

Sea $X$ un conjunto y $\sim_R$ una relación de equivalencia en dicho conjunto.



# ¿Qué tienen de especial las relaciones de equivalencia?

# ¿Por qué van a ser tan importantes?




Sea $X$ un conjunto y $\sim_R$ una relación de equivalencia en dicho conjunto.

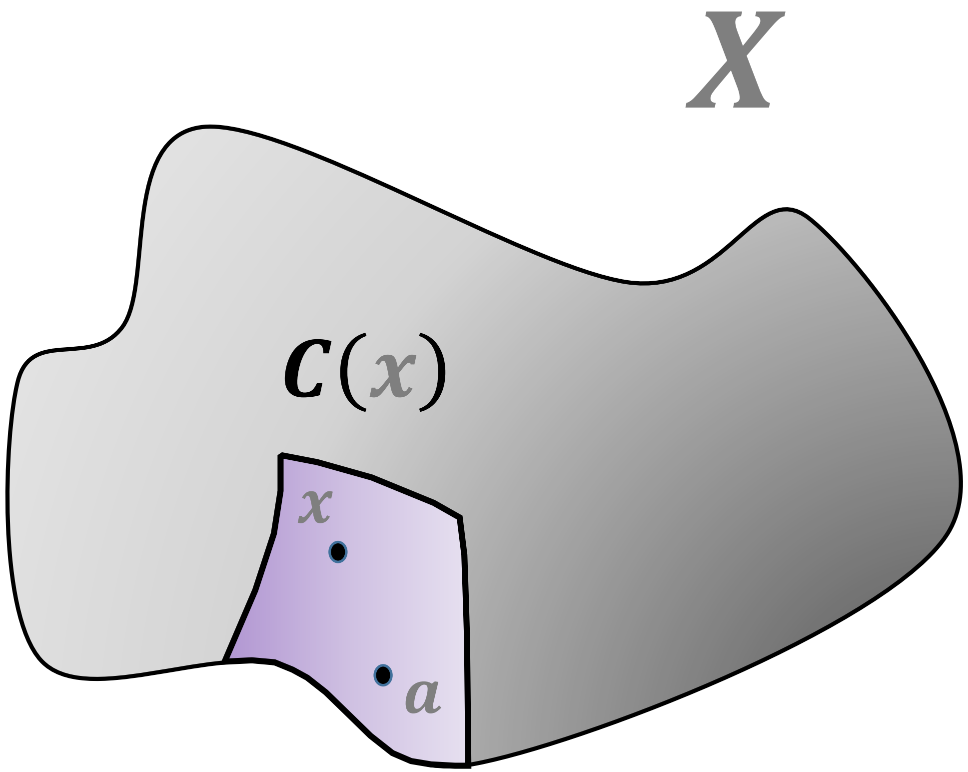
En este vídeo vamos a ver que una relación de equivalencia en un conjunto equivale a dar una partición de dicho conjunto. Pero... no nos anticipemos a los acontecimientos.

Sea $X$ un conjunto y $\sim_R$ una relación de equivalencia en dicho conjunto.

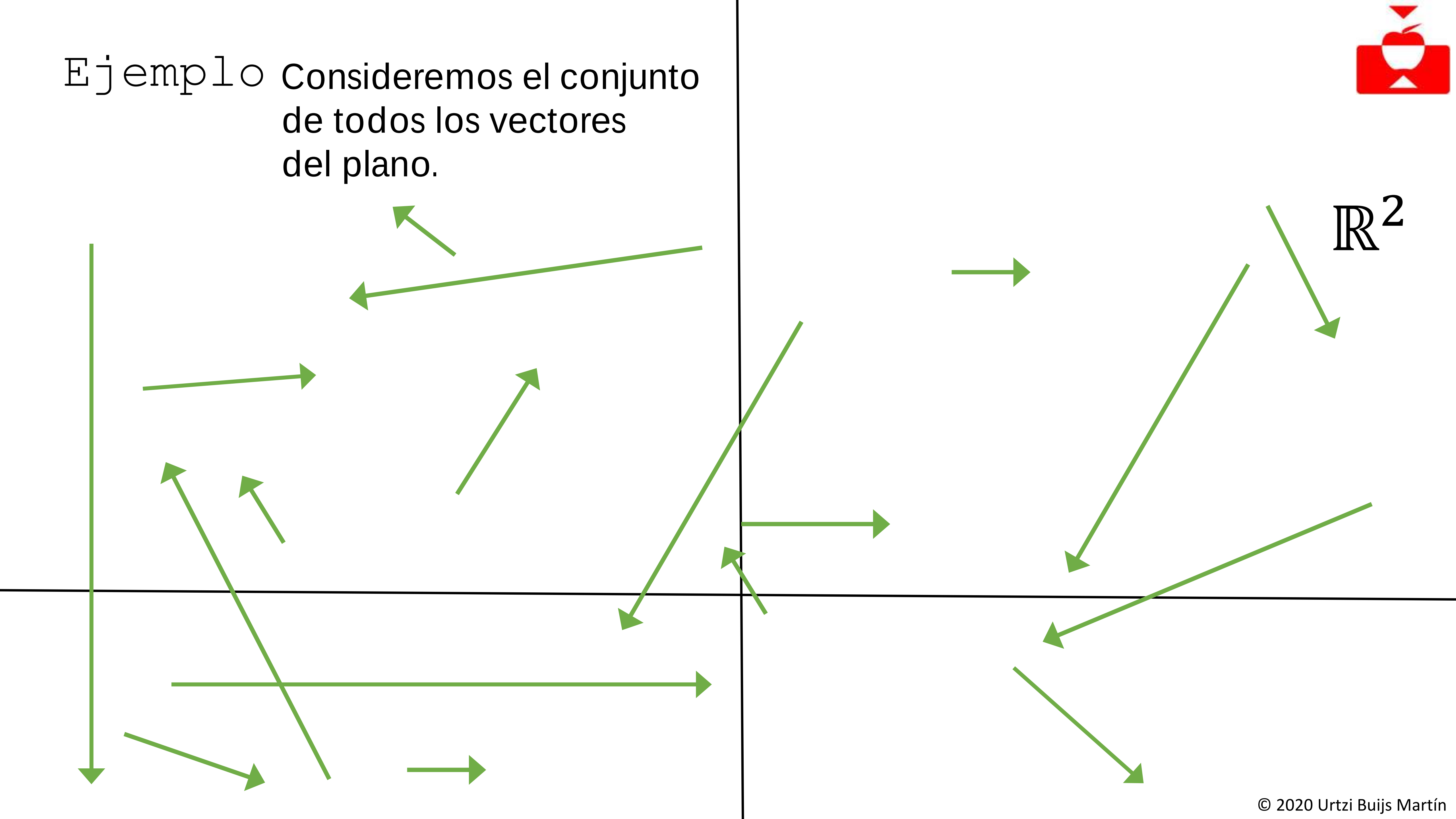
## Definición

Sea $x \in X$, se define la **clase** de $x$ como el subconjunto de $X$

$$C(x) = \{\, a \in X \mid a \sim_R x \,\}$$

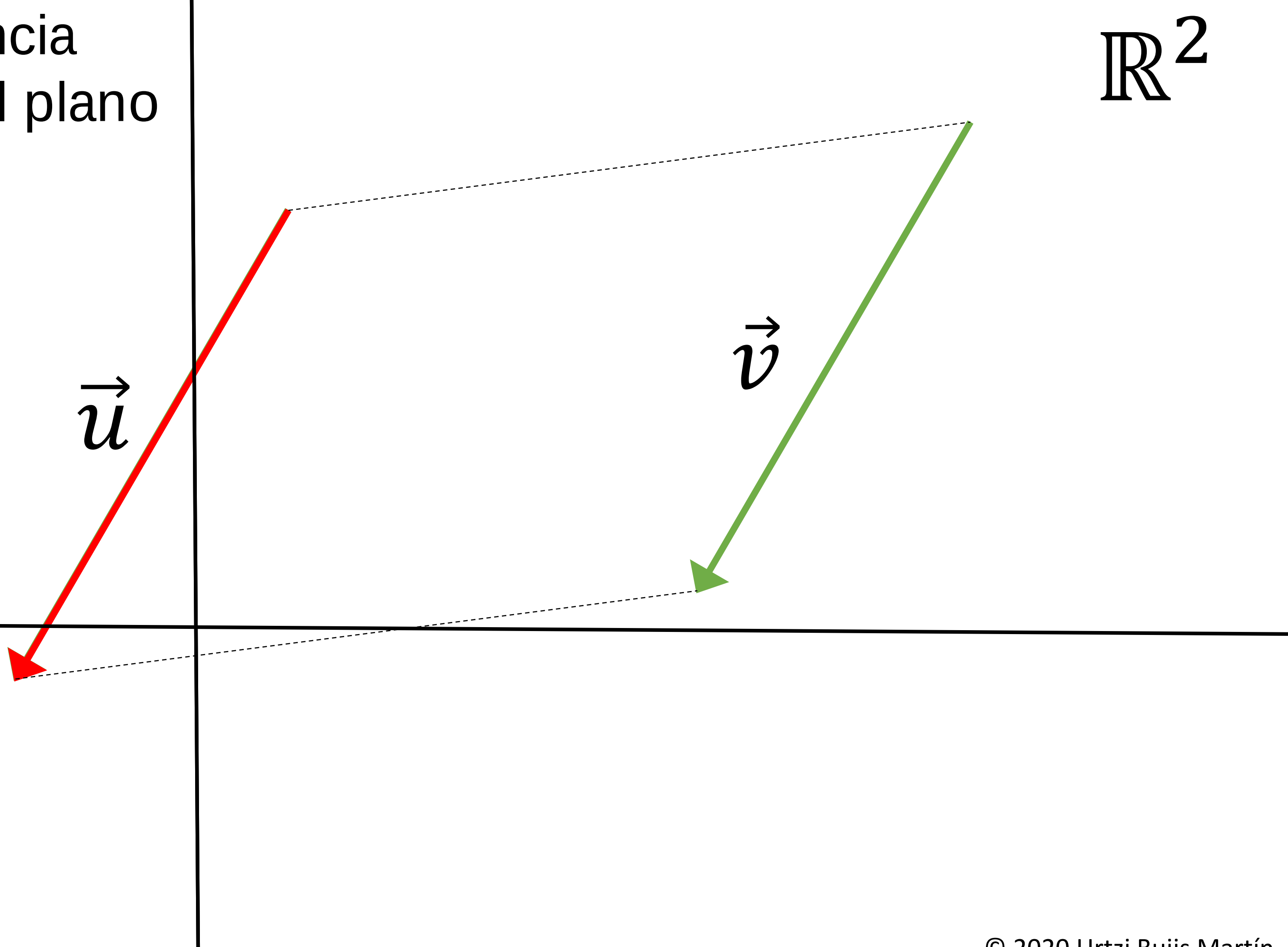


Ejemplo Consideremos el conjunto de todos los vectores del plano.



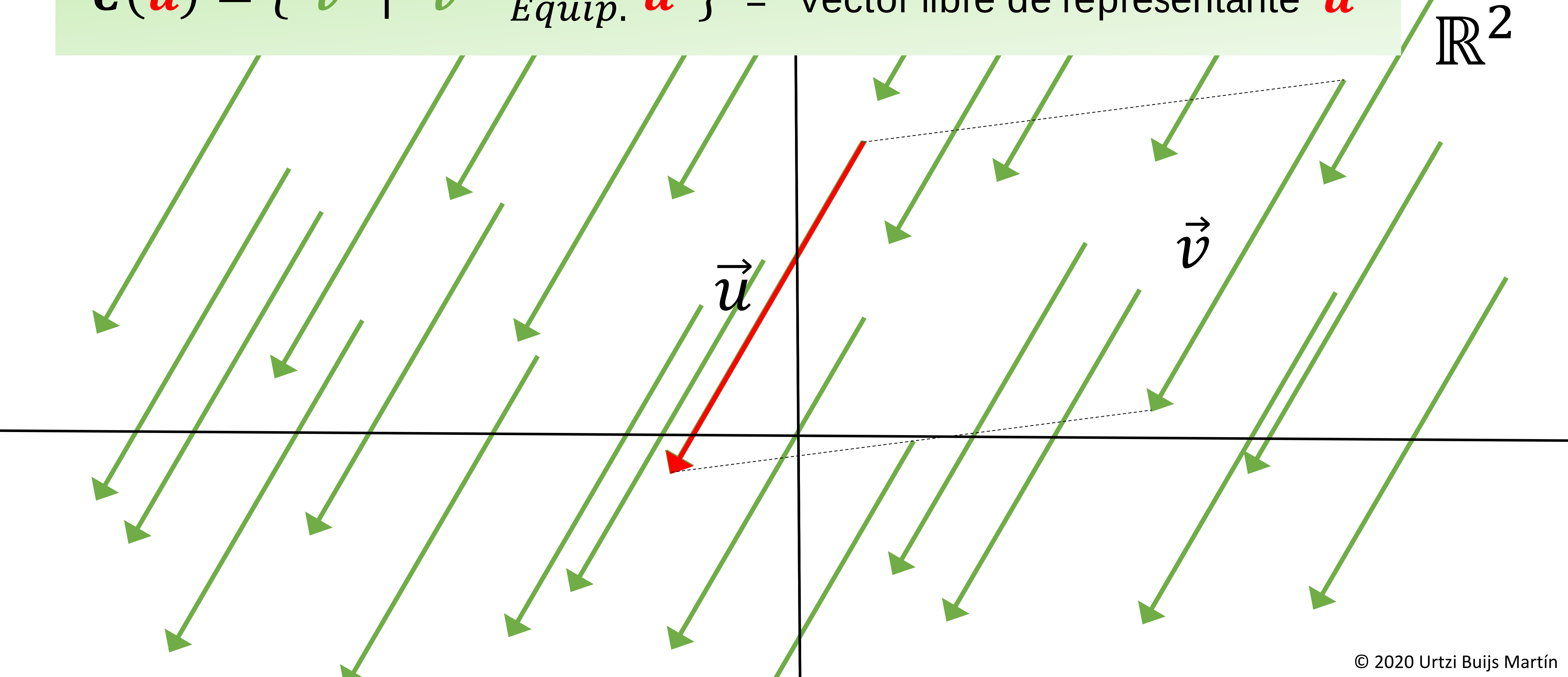
Ejemplo Vimos con anterioridad que la relación de EQUIPOLENCIA era una relación de equivalencia entre los vectores del plano

RELACIÓN DE EQUIPOLENCIA



# Ejemplo

$$C(\vec{u}) = \{\ \vec{v}\ \mid\ \vec{v} \sim_{Equip.} \vec{u}\ \}$$ = Vector libre de representante $\vec{u}$

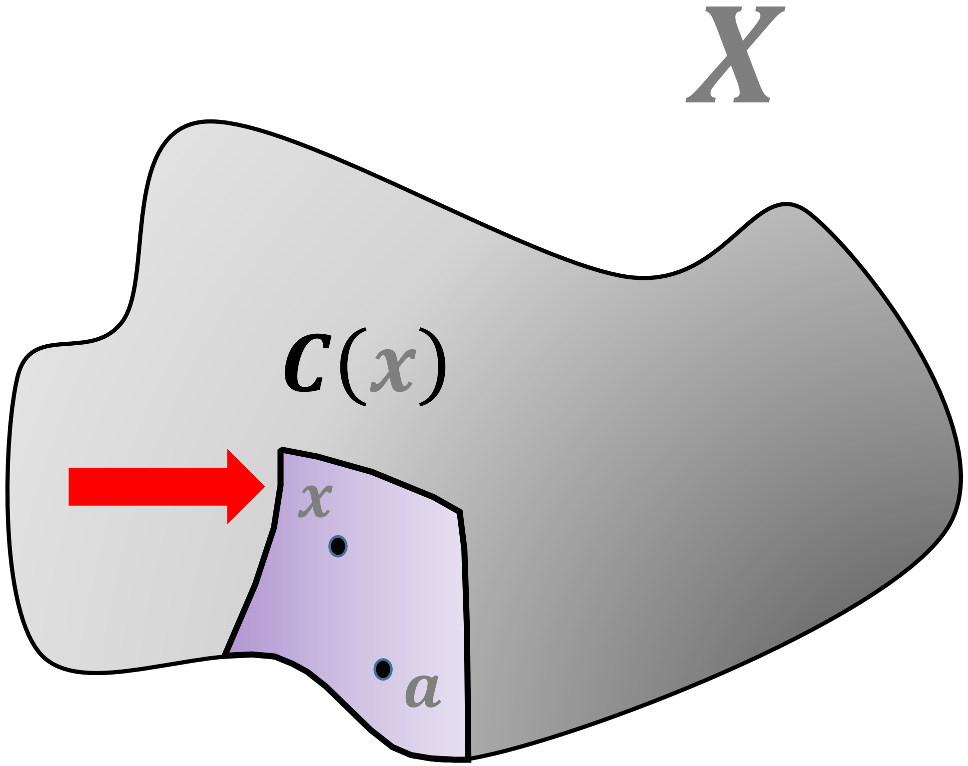


$$C(x) = \{\, a \in X \mid a \sim_R x \,\}$$

# Proposición 1

Para todo $x \in X$ se tiene que $C(x)$ es un conjunto no vacío

$$C(x) \neq \emptyset$$




## Demostración:

$$x \in C(x) = \{\, a \in X \mid a \sim_R x \,\}$$

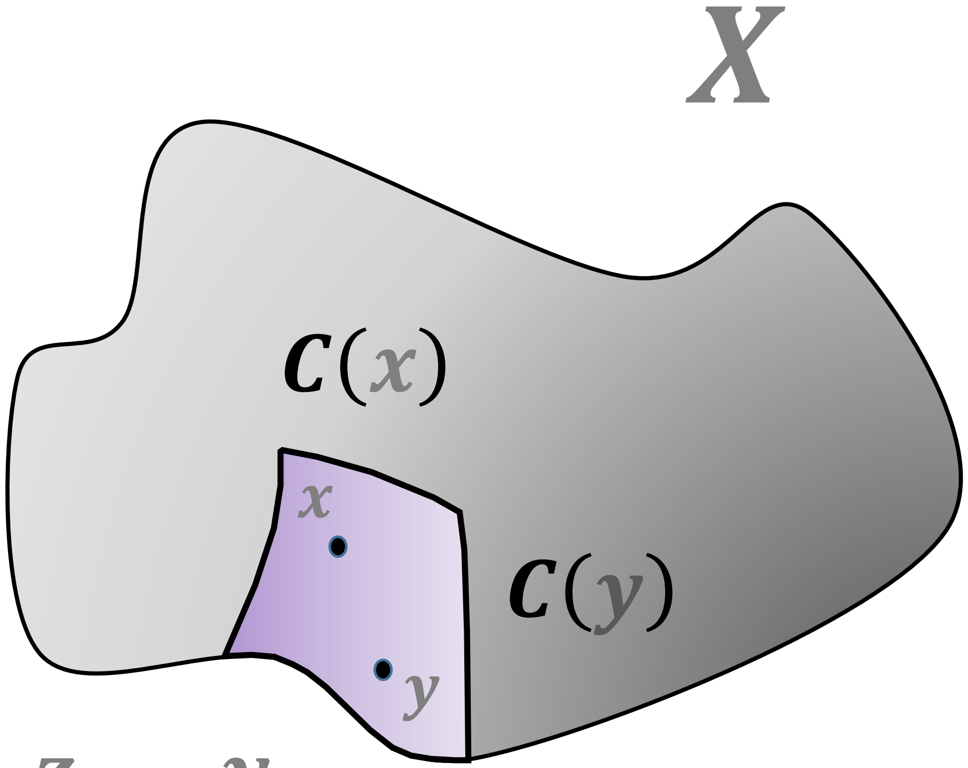
$x \sim_R x$ por la propiedad **reflexiva**.

$$C(x) = \{\, a \in X \mid a \sim_R x \,\}$$

## Proposición 2

Si $y \in C(x)$, entonces se tiene que

$$C(y) = C(x)$$




Demostración:

$$C(y) \subseteq C(x)$$

$$z \in C(y) = \{\, a \in X \mid a \sim_R y \,\} \Rightarrow z \sim_R y$$

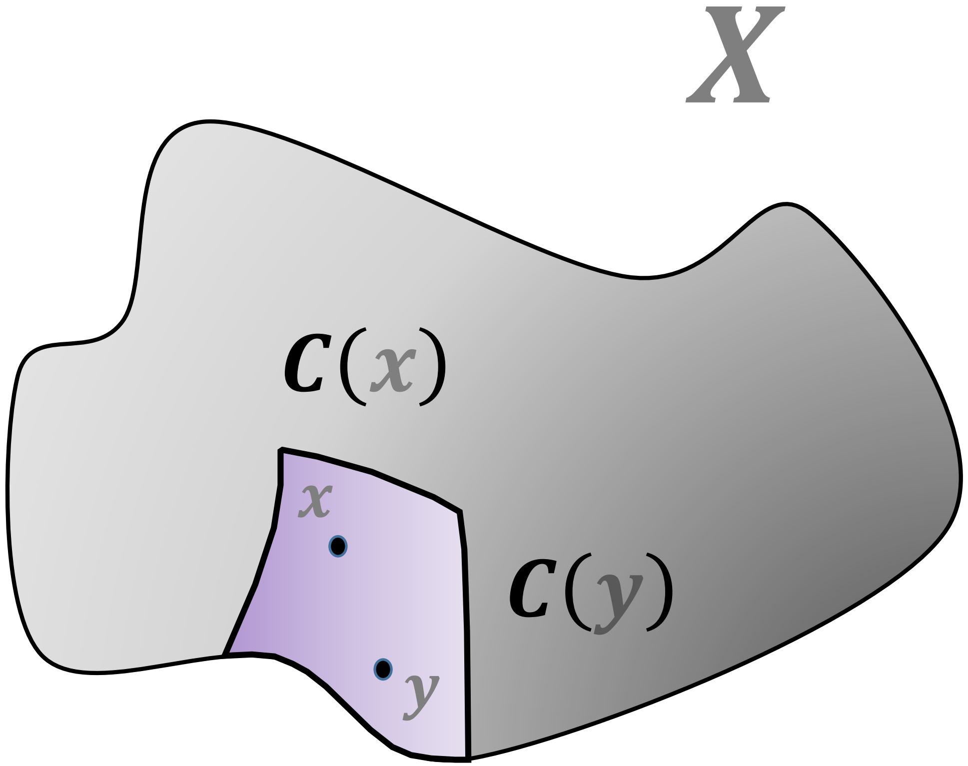
$$y \in C(x) = \{\, a \in X \mid a \sim_R x \,\} \Rightarrow y \sim_R x$$

$$C(x) = \{\, a \in X \mid a \sim_R x \,\}$$

## Proposición 2

Si $y \in C(x)$, entonces se tiene que

$$C(y) = C(x)$$




### Demostración:

$$C(y) \subseteq C(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} z \sim_R y \\ y \sim_R x \end{array}\right\} \Longrightarrow z \sim_R x \Longrightarrow z \in C(x)$$

Propiedad Transitiva

$$C(x) = \{ a \in X \mid a \sim_R x \}$$

## Proposición 2

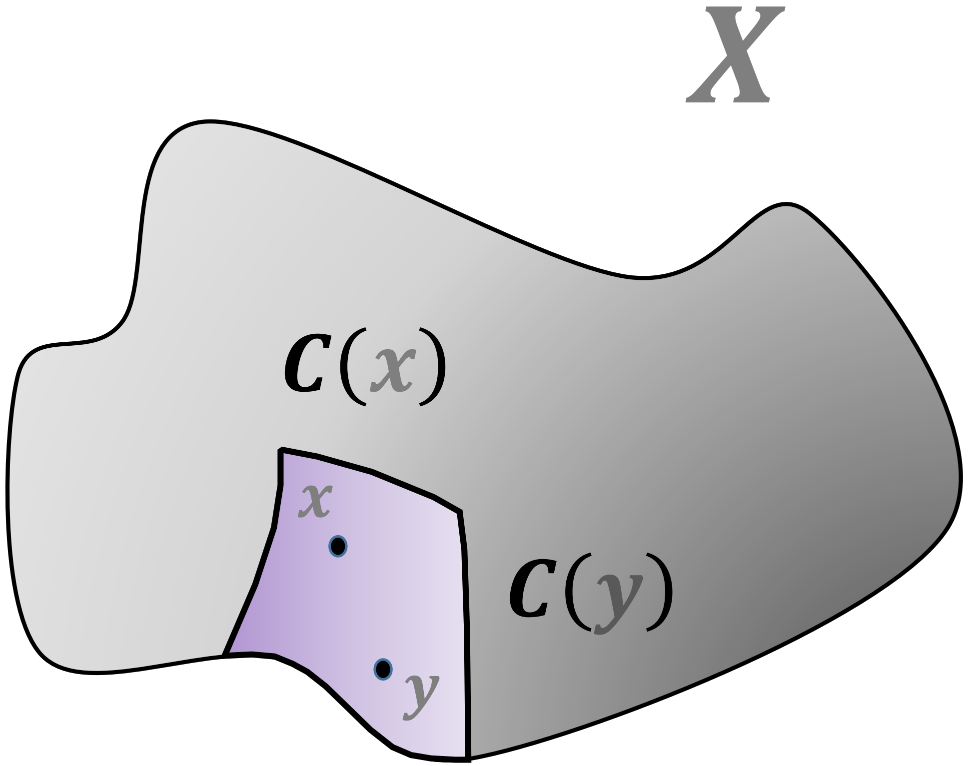
Si $y \in C(x)$, entonces se tiene que

$$C(y) = C(x)$$

Demostración:

$$C(y) \subseteq C(x)$$

$$z \in C(y) \Longrightarrow z \in C(x)$$

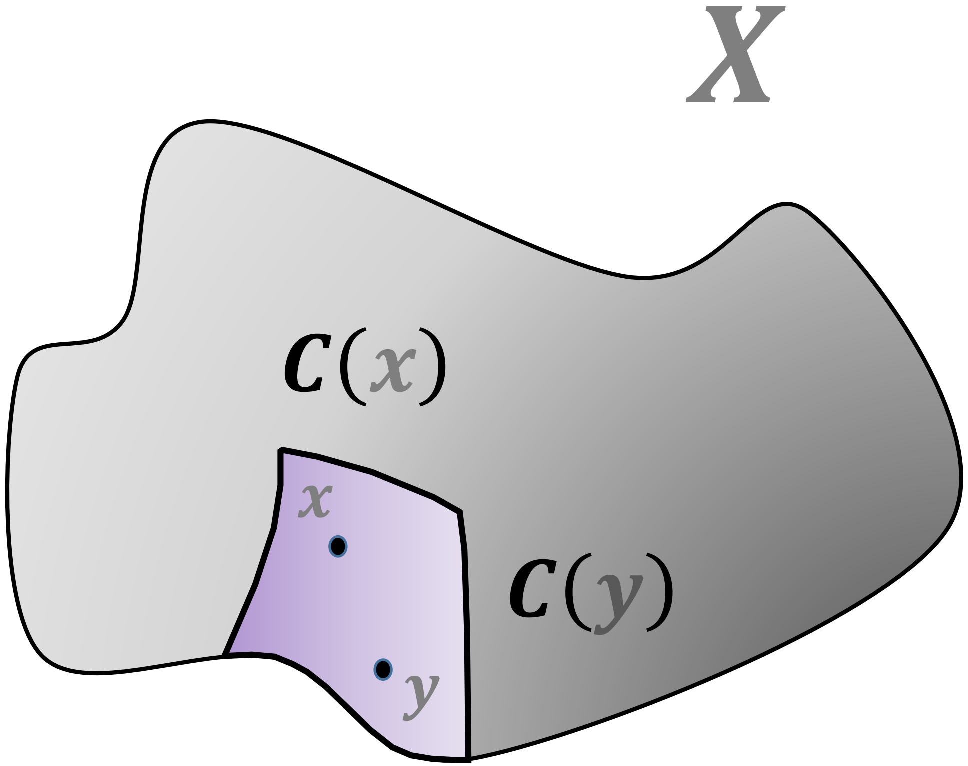


$$\boldsymbol{C}(x) = \{\, a \in X \mid a \sim_R x \,\}$$

# Proposición 2

Si $y \in \boldsymbol{C}(x)$, entonces se tiene que

$$\boldsymbol{C}(y) = \boldsymbol{C}(x)$$




## Demostración:

$$\boldsymbol{C}(x) \subseteq \boldsymbol{C}(y)$$

$$\left.\begin{array}{l} z \in \boldsymbol{C}(x) \;\Rightarrow\; z \sim_R x \\ y \in \boldsymbol{C}(x) \;\Rightarrow\; y \sim_R x \;\Rightarrow\; x \sim_R y \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; z \sim_R y \;\Rightarrow\; z \in \boldsymbol{C}(y)$$

Propiedad Simétrica

Propiedad Transitiva

$$\boldsymbol{C}(x) = \{\, a \in X \mid a \sim_R x \,\}$$

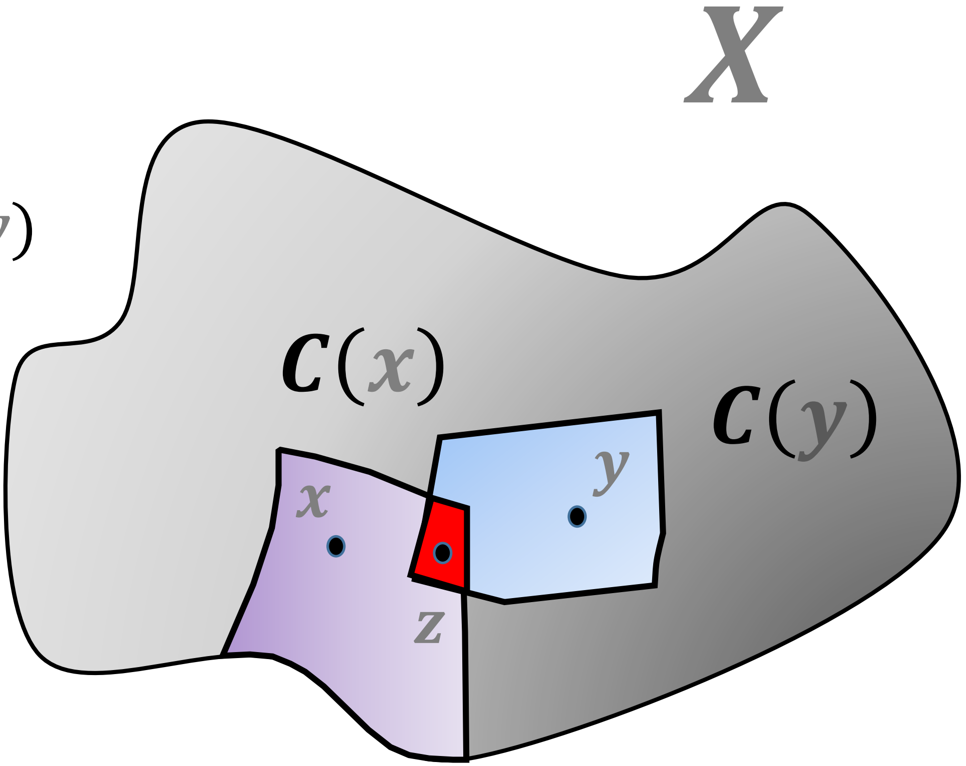
## Proposición 3

Si $x, y \in X$, verifican que sus clases $\boldsymbol{C}(x), \boldsymbol{C}(y)$ no son disjuntas

$$\boldsymbol{C}(x) \cap \boldsymbol{C}(y) \neq \emptyset\,,$$

entonces se verifican que

$$\boldsymbol{C}(x) = \boldsymbol{C}(y).$$

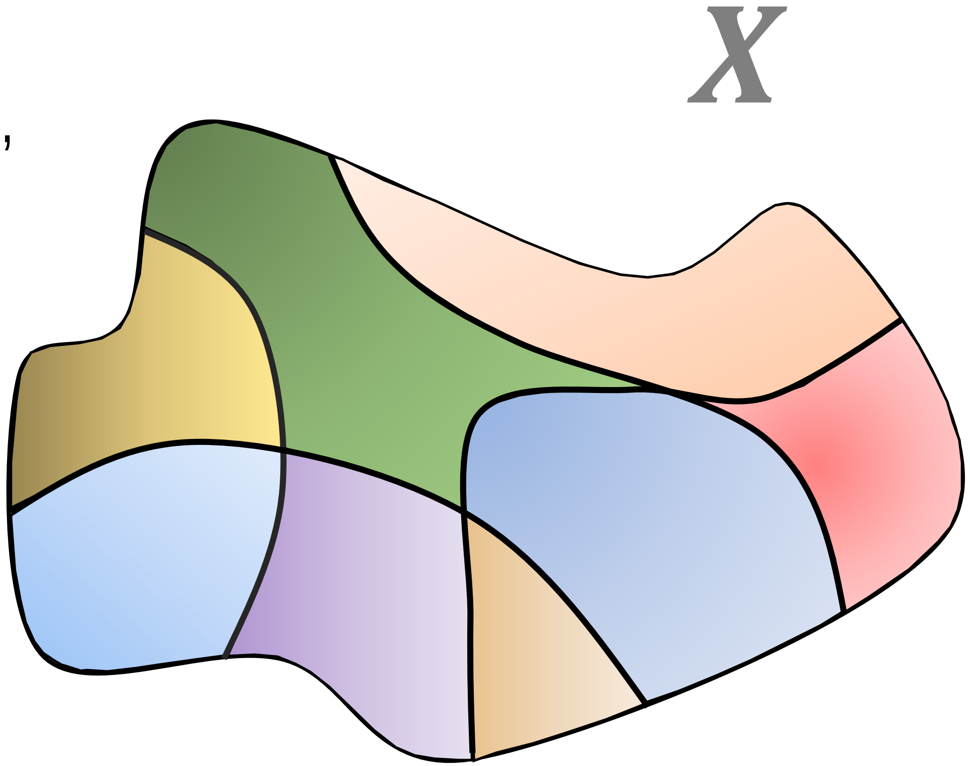



### Demostración:

Sea $z \in \boldsymbol{C}(x) \cap \boldsymbol{C}(y) \neq \emptyset. \Rightarrow \left.\begin{cases} z \in \boldsymbol{C}(x) \Rightarrow z \sim_R x \Rightarrow x \sim_R z \\ z \in \boldsymbol{C}(y) \Rightarrow z \sim_R y \end{cases}\right\} \Rightarrow x \sim_R y$

## Definición

Una **partición** de un conjunto $X$ es una colección $\mathcal{P}$ de subconjuntos no vacíos de $X$, disjuntos dos a dos, cuya unión es todo $X$.

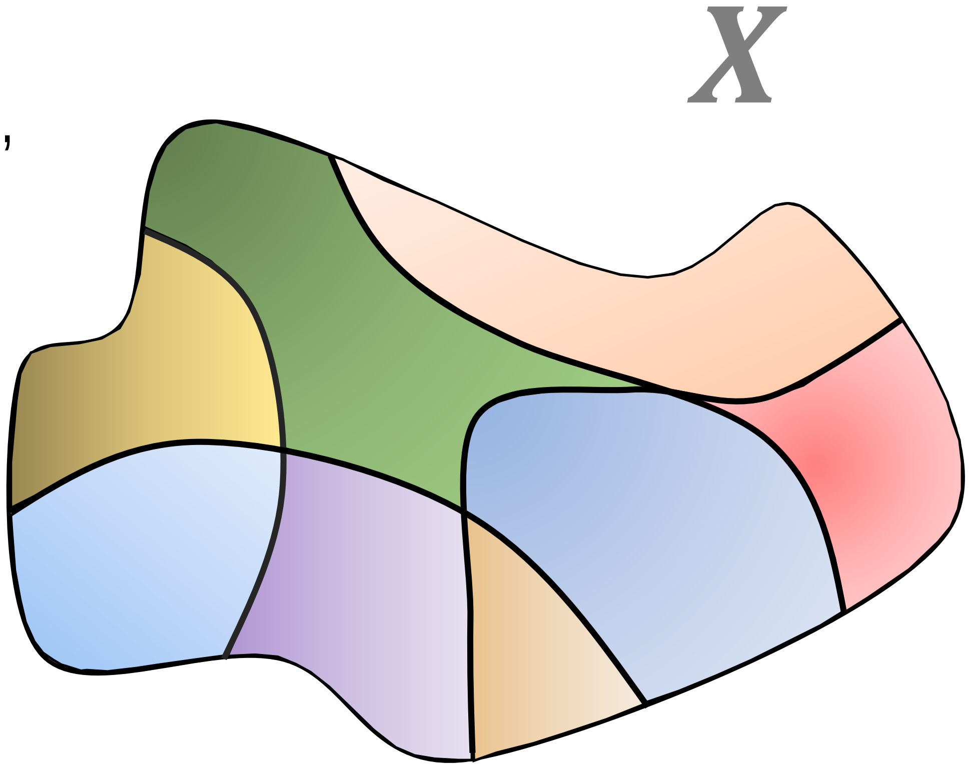


# Definición

Una **partición** de un conjunto $X$ es una colección $\mathcal{P}$ de subconjuntos no vacíos de $X$, disjuntos dos a dos, cuya unión es todo $X$.

Sea $\sim_R$ una relación de equivalencia en el conjunto $X$.

$\mathcal{P} = \{ \text{Clases de equivalencia} \}$
son una partición de $X$.




**Proposición 1** $\;\; C(x) \neq \emptyset$

**Proposición 3** $\;\; C(x) \cap C(y) = \emptyset$ , o bien $C(x) = C(y)$

$\bigcup \{ \text{Clases de equivalencia} \} = X$ ya que $x \in C(x)$

# Definición

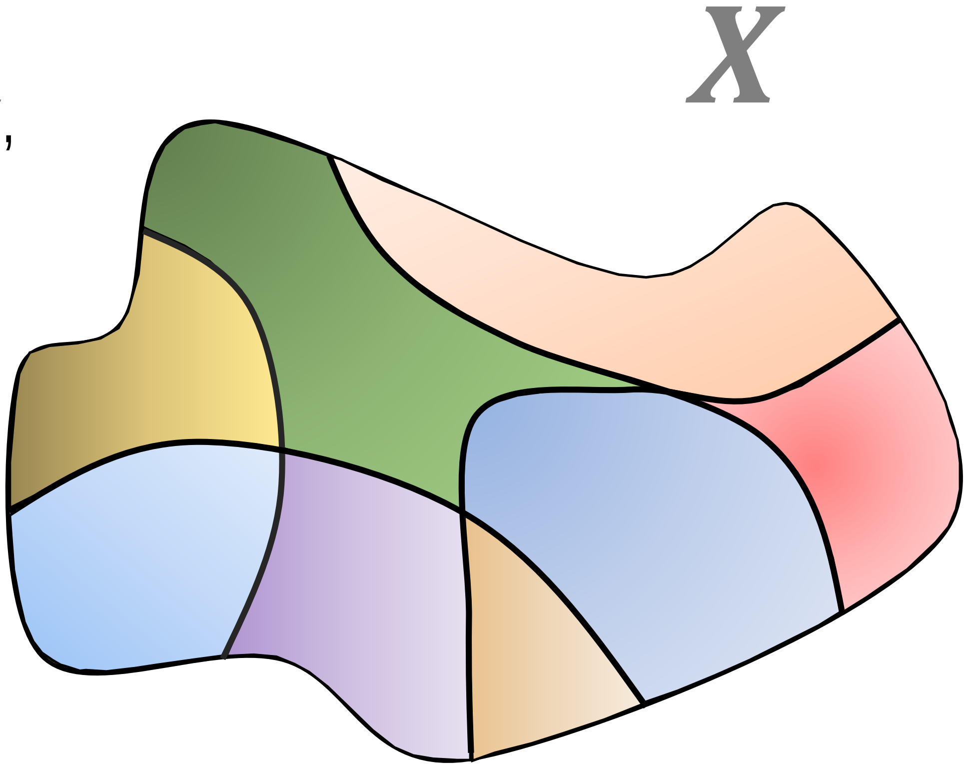
Una **partición** de un conjunto $X$ es una colección $\mathcal{P}$ de subconjuntos no vacíos de $X$, disjuntos dos a dos, cuya unión es todo $X$.

Sea $\mathcal{P}$ una partición del conjunto $X$.

$\Downarrow$

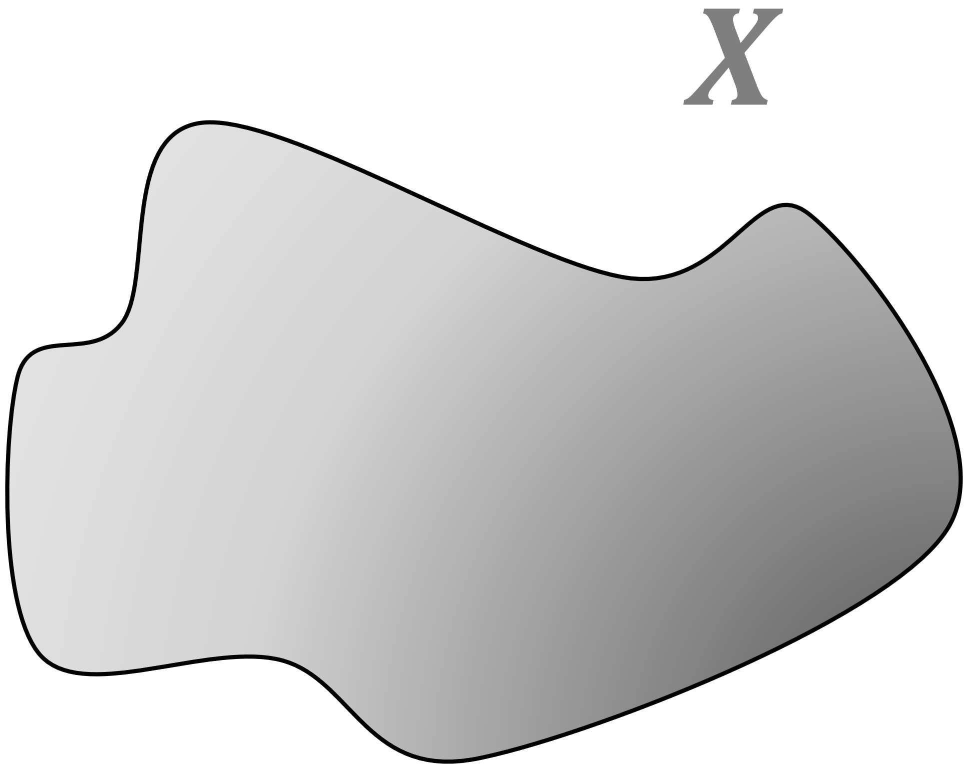
$x \sim_{\mathcal{P}} y$ si y solo si ambos pertenecen al mismo subconjunto de la partición $\mathcal{P}$

$$x, y \in A, \text{ para } A \in \mathcal{P}$$



# Definición

Dado un conjunto $X$ y $\sim_R$ una relación de equivalencia en $X$, se define el **conjunto cociente** $X / \sim_R$ como el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de la relación $\sim_R$ .

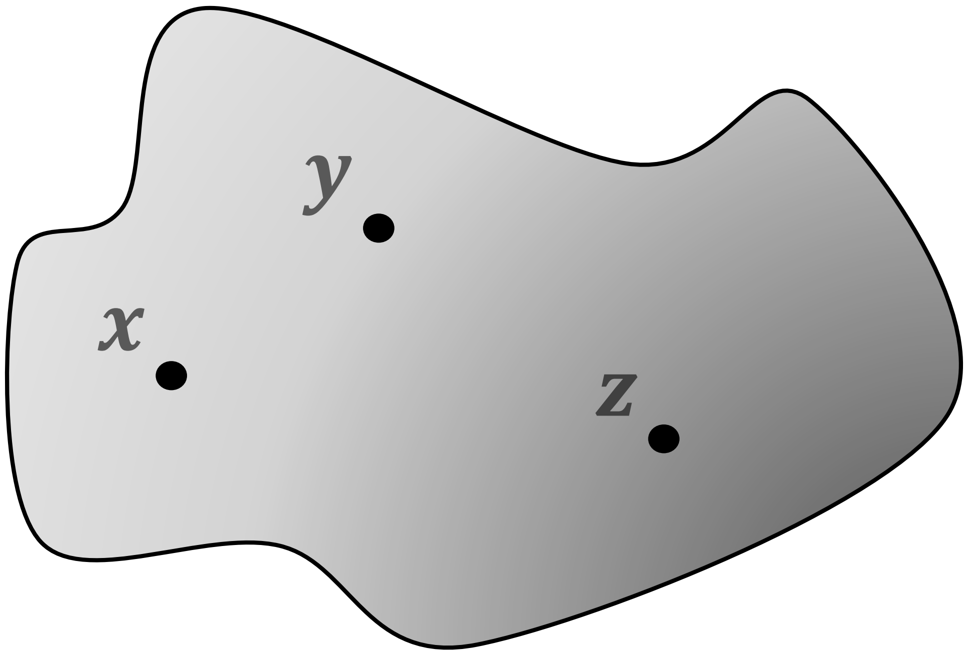


# Definición

Dado un conjunto $X$ y $\sim_R$ una relación de equivalencia en $X$, se define el **conjunto cociente** $X\,/\sim_R$ como el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de la relación $\sim_R$ .

Pertenecen

$x, y, z \in X$

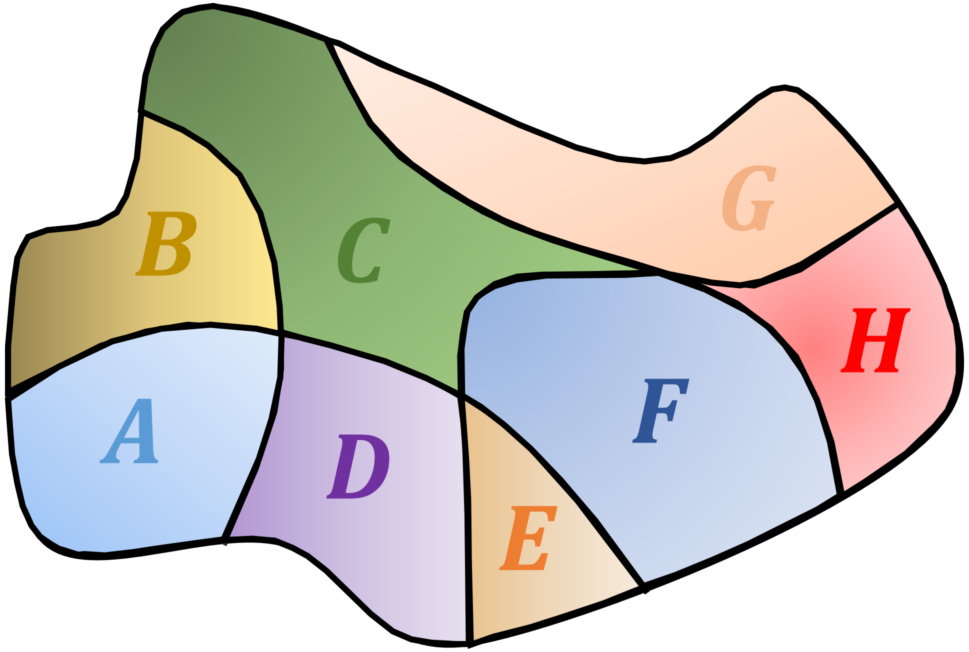


# Definición

Dado un conjunto $X$ y $\sim_R$ una relación de equivalencia en $X$, se define el **conjunto cociente** $X / \sim_R$ como el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de la relación $\sim_R$ .

Contenido

$$A, B, C, D, E, F, G, H \subseteq X$$



# Definición

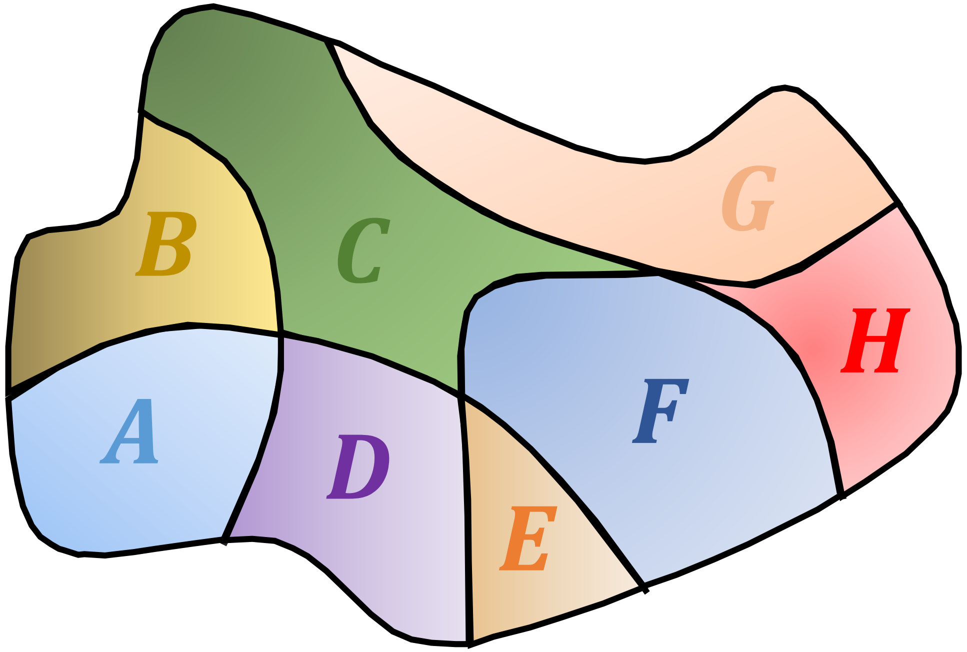
Dado un conjunto $X$ y $\sim_R$ una relación de equivalencia en $X$, se define el **conjunto c** ... $/\sim_R$ como el conjunto cuyos elementos son las cl ... ivalencia de la relación $\sim_R$ .

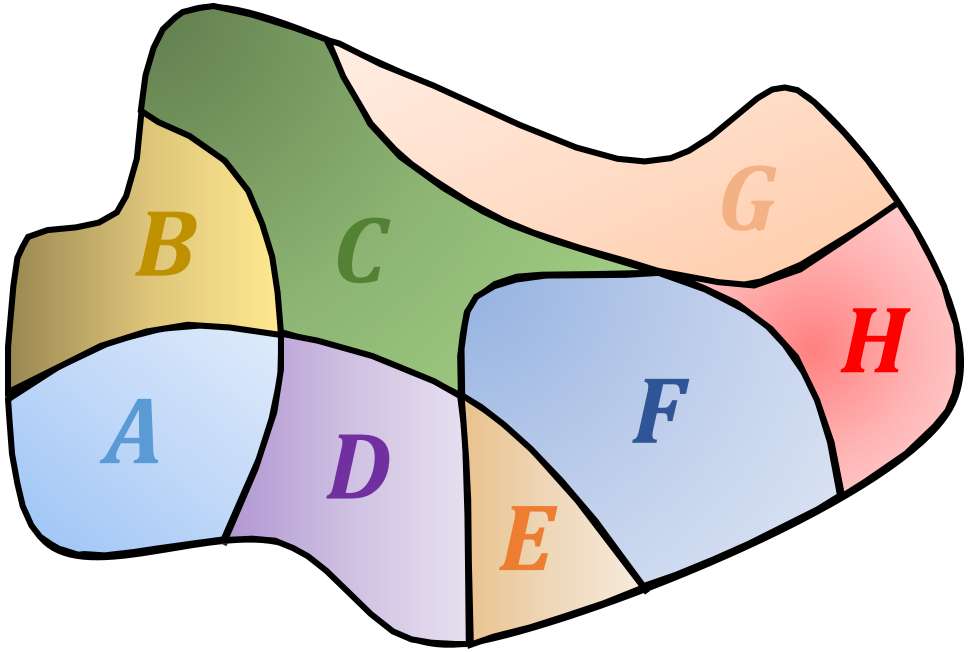
Pertenece

Contenido

$A, B, C, D, E, F, G, H \in X/\sim_R$

$A, B, C, D, E, F, G, H \subseteq X$



# ¿Qué son los números racionales?

# ¿Qué son los números racionales?

¿ $\mathbb{Q}$ ?

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

$$(a, b) \sim (c, d)$$

$$(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

$$(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

si y solo $a \times d = b \times c$

# ¿Qué son los números racionales?

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

$(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$$(a, b) \sim (c, d)$$

si y solo $a \times d = b \times c$

Es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ .

## ¿Qué son los números racionales?

$$\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*}{\sim} = \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$$

$$(a,b)\sim(c,d)$$

$(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

$(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

si y solo $a\times d = b\times c$

# ¿Qué son los números racionales?

$$\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{\sim} = \mathbb{Q}$$

$$(a,b)\sim(c,d)$$

$$C(a,b) = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = C(c,d)$$

si y solo $\boxed{a \times d} = \boxed{b \times c}$

# ¿Qué son los números racionales?

$$\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{\sim} = \mathbb{Q}$$

$$(a,b)\sim(c,d)$$

$$C(a,b) = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = C(c,d)$$

si y solo $\boxed{a \times d} = \boxed{b \times c}$

Ejemplo

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \cdots$$