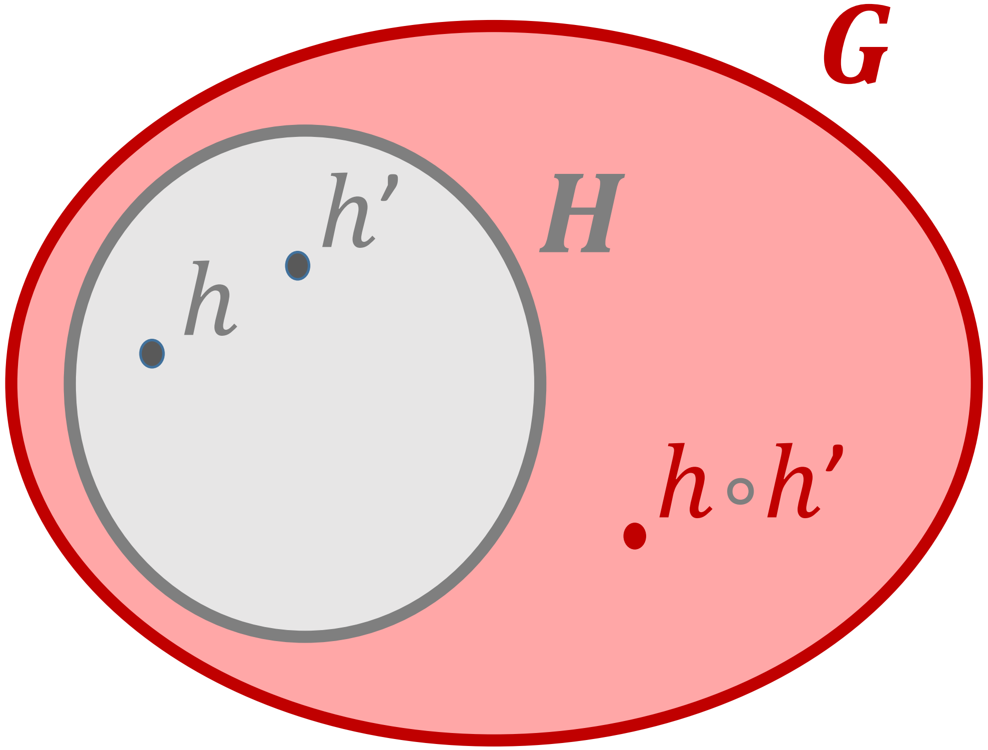
Definición

Sea $(\boldsymbol{G}, \circ)$ un grupo. Un **subgrupo** $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{G}$ es un subconjunto $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{G}$, tal que $(\boldsymbol{H}, \circ)$ es a su vez un grupo con la operación heredada de $\boldsymbol{G}$.

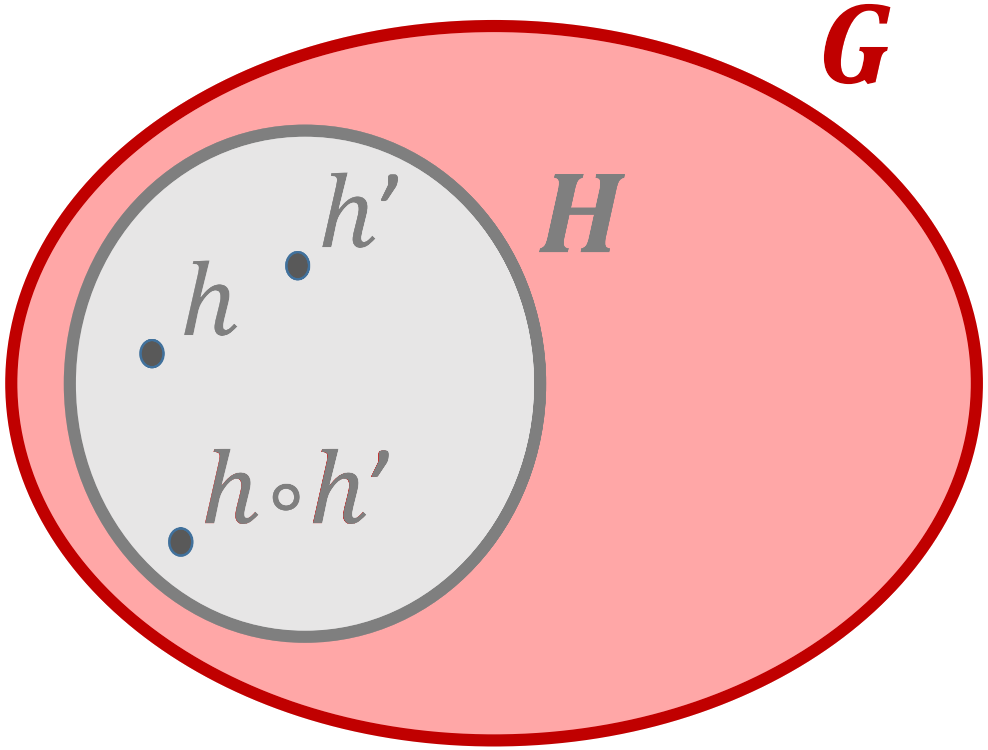
Definición

Sea $(\boldsymbol{G}, \circ)$ un grupo. Un **subgrupo** $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{G}$ es un subconjunto $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{G}$, tal que $(\boldsymbol{H}, \circ)$ es a su vez un grupo con la operación heredada de $\boldsymbol{G}$. Esto es, la operación $\circ$ es cerrada en $\boldsymbol{H}$



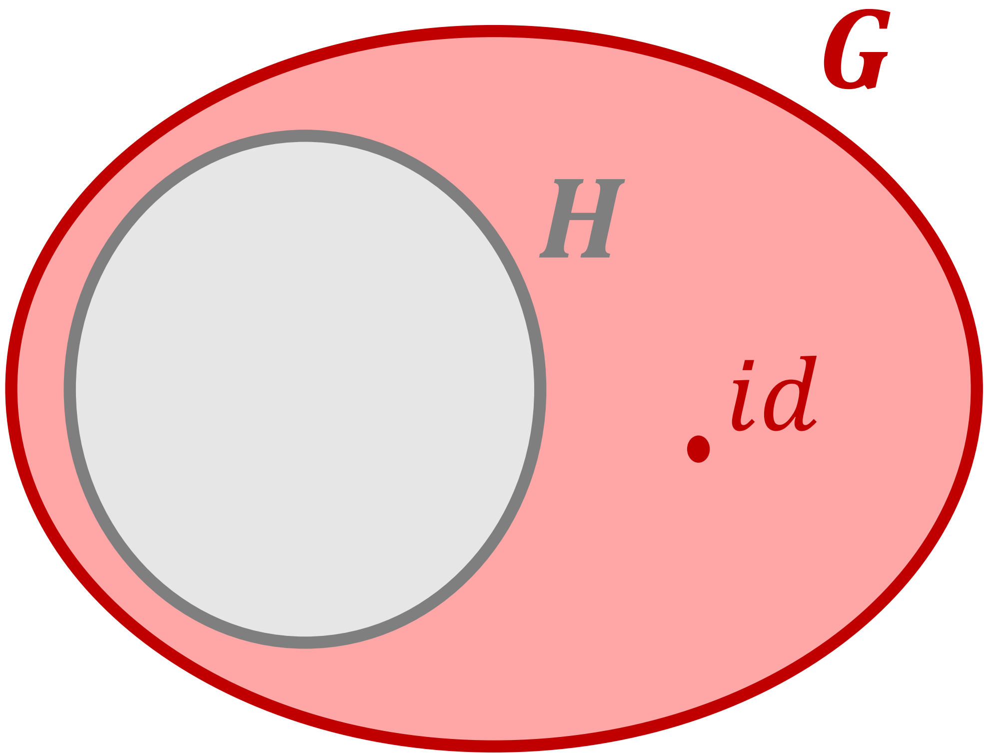
Definición

Sea $(\boldsymbol{G}, \circ)$ un grupo. Un **subgrupo** $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{G}$ es un subconjunto $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{G}$, tal que $(\boldsymbol{H}, \circ)$ es a su vez un grupo con la operación heredada de $\boldsymbol{G}$. Esto es, la operación $\circ$ es cerrada en $\boldsymbol{H}$



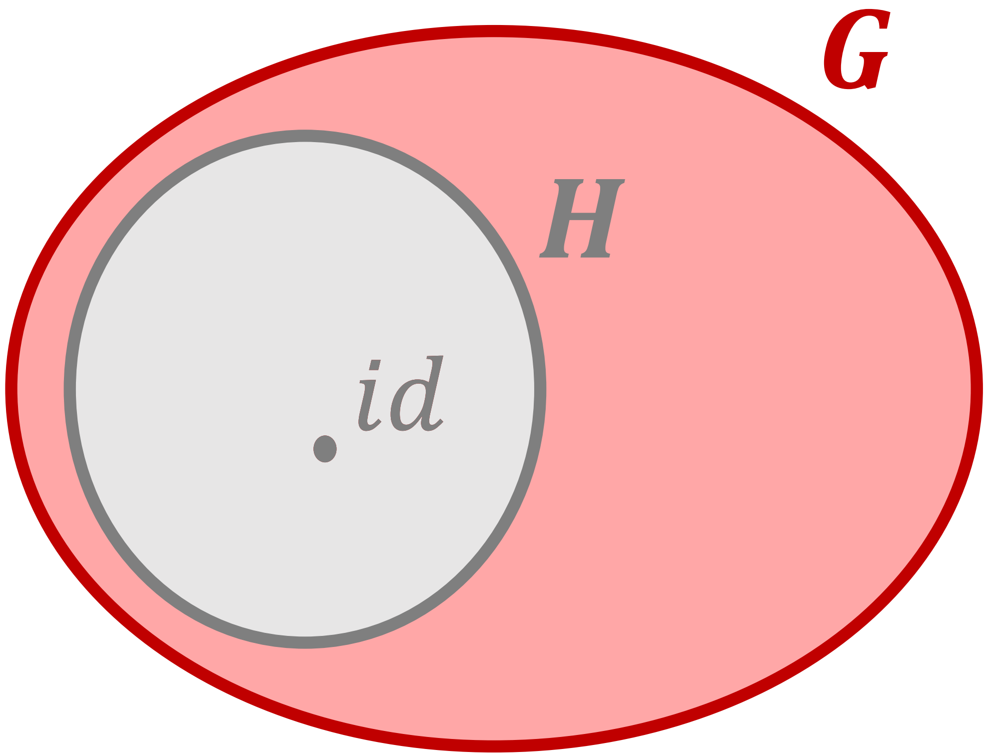
Definición

Sea $(G, \circ)$ un grupo. Un **subgrupo** H de G es un subconjunto $H \subseteq G$, tal que $(H, \circ)$ es a su vez un grupo con la operación heredada de G. Esto es, la operación $\circ$ es cerrada en H, el elemento identidad id pertenece también a H



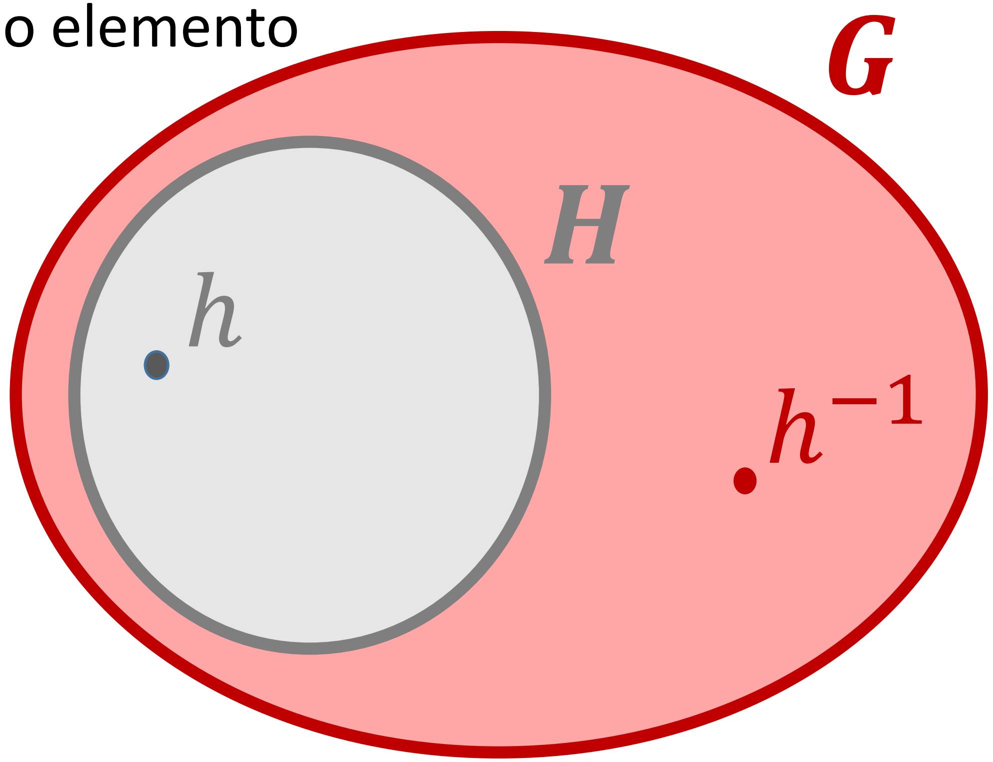
Definición

Sea $(\boldsymbol{G}, \circ)$ un grupo. Un **subgrupo** $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{G}$ es un subconjunto $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{G}$, tal que $(\boldsymbol{H}, \circ)$ es a su vez un grupo con la operación heredada de $\boldsymbol{G}$. Esto es, la operación $\circ$ es cerrada en $\boldsymbol{H}$, el elemento identidad $\boldsymbol{id}$ pertenece también a $\boldsymbol{H}$



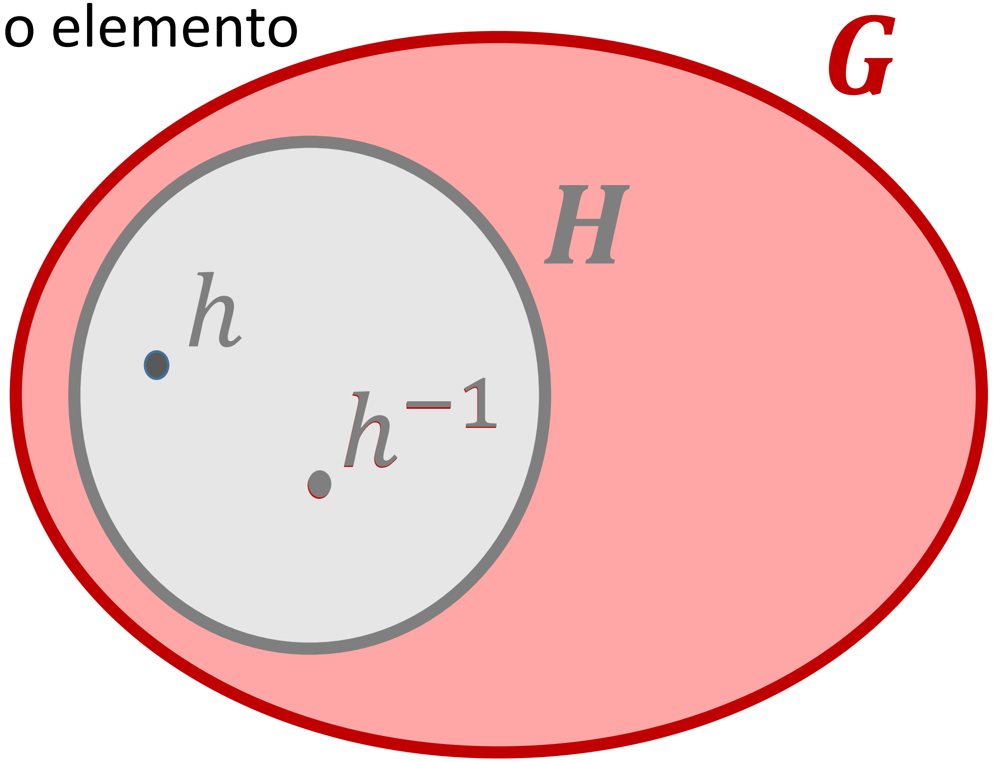
Definición

Sea $(\boldsymbol{G}, \circ)$ un grupo. Un **subgrupo** $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{G}$ es un subconjunto $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{G}$, tal que $(\boldsymbol{H}, \circ)$ es a su vez un grupo con la operación heredada de $\boldsymbol{G}$. Esto es, la operación $\circ$ es cerrada en $\boldsymbol{H}$, el elemento identidad $\boldsymbol{id}$ pertenece también a $\boldsymbol{H}$, y la inversa de todo elemento de $\boldsymbol{H}$ es también un elemento de $\boldsymbol{H}$.



Definición

Sea $(G, \circ)$ un grupo. Un **subgrupo** H de G es un subconjunto $H \subseteq G$, tal que $(H, \circ)$ es a su vez un grupo con la operación heredada de G. Esto es, la operación $\circ$ es cerrada en H, el elemento identidad id pertenece también a H, y la inversa de todo elemento de H es también un elemento de H.



Definición

Sea $(\boldsymbol{G}, \circ)$ un grupo. Un **subgrupo** $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{G}$ es un subconjunto $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{G}$, tal que $(\boldsymbol{H}, \circ)$ es a su vez un grupo con la operación heredada de $\boldsymbol{G}$. Esto es, la operación $\circ$ es cerrada en $\boldsymbol{H}$, el elemento identidad $\boldsymbol{id}$ pertenece también a $\boldsymbol{H}$, y la inversa de todo elemento de $\boldsymbol{H}$ es también un elemento de $\boldsymbol{H}$.

Utilizaremos la notación $\boldsymbol{H} \leq \boldsymbol{G}$ para indicar que $\boldsymbol{H}$ es un subgrupo de $\boldsymbol{G}$.

Ejemplo 1

$$(\boldsymbol{G}, \circ) = (\mathbb{Z}, +)$$

$$\boldsymbol{H} = 2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$\boldsymbol{H'} = 3\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6 \dots\}$$

Ejemplo 1

$$(G, \circ) = (\mathbb{Z} , +)$$

$$H = 2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

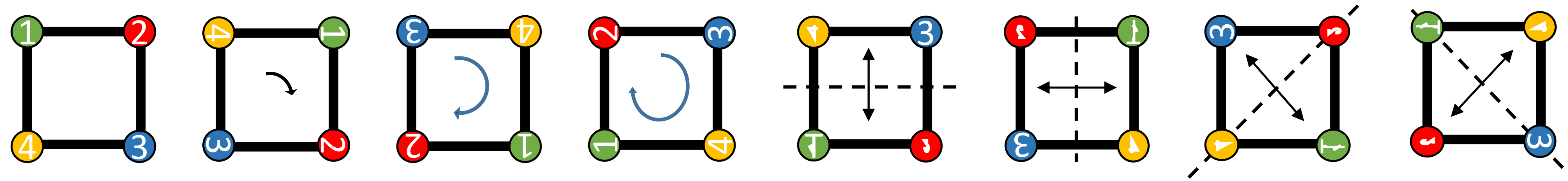
$$H' = 3\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6 \dots\}$$

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ fijo se tiene que el conjunto de múltiplos de n definido por $n\mathbb{Z} = \{\dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$ forman un subgrupo de $(\mathbb{Z} , +)$

Demostración:

- Sean $p, q \in \mathbb{Z}$; $np, nq \in n\mathbb{Z}$. Entonces $np + nq = n(p + q) \in n\mathbb{Z}$.
- El elemento neutro $id = 0 = n0 \in n\mathbb{Z}$.
- Sea $p \in \mathbb{Z}$; $np \in n\mathbb{Z}$. El opuesto $-np = n(-p) \in n\mathbb{Z}$.

Ejemplo 2

$G = \{$  $\}$

$= \{ id, \; r_1, \; r_2, \; r_3, \; f_v, \; f_h, \; f_d, \; f_c \}$

$H = \{ id, \; r_1, \; r_2, \; r_3 \}$

Sea $(G, \circ)$ el grupo de simetrías del cuadrado que estudiamos en el primer capítulo de esta serie. Consideremos como H el subconjunto de rotaciones. En dicho capítulo dijimos que la composición de dos rotaciones era claramente otra rotación. Veamos esto con un poco más de detalle.

$\circ$	**id**	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
f_h	f_h	f_c	f_v	f_d	r_2	id	r_3	r_1
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

$$H = \{\ id,\quad r_1,\quad r_2,\quad r_3\ \}$$

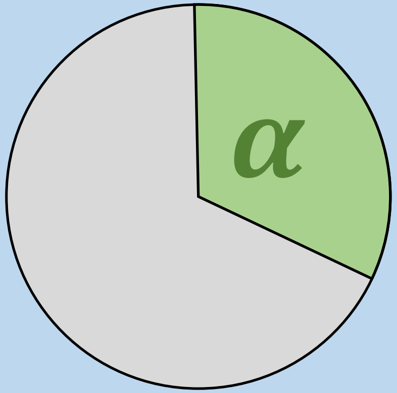
$\circ$	**id**	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
f_h	f_h	f_c	f_v	f_d	r_2	id	r_3	r_1
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

$$0^\circ < \alpha < 360^\circ$$

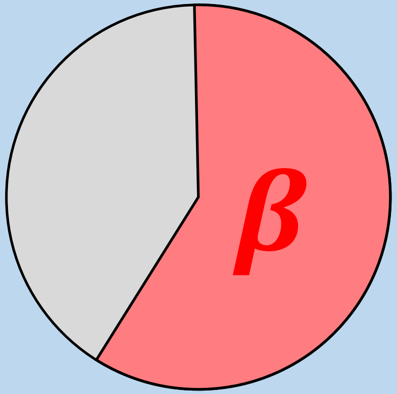
$$0^\circ < \beta < 360^\circ$$

$$\alpha + \beta < 360^\circ$$

r_α



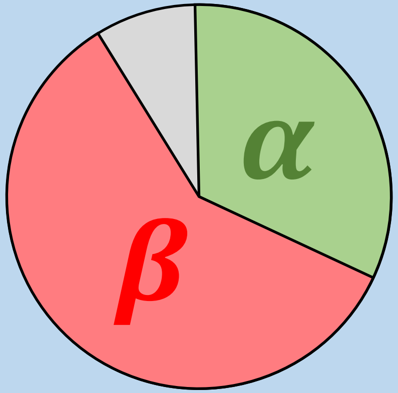
r_β



$$r_\alpha \circ r_\beta$$

$$= r_\beta \circ r_\alpha$$

$$= r_{\alpha+\beta}$$



$H = \{ \ id, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3 \ \}$

$\circ$	$\mathbf{id}$	$\boldsymbol{r}_1$	$\boldsymbol{r}_2$	$\boldsymbol{r}_3$	$\boldsymbol{f}_v$	$\boldsymbol{f}_h$	$\boldsymbol{f}_d$	$\boldsymbol{f}_c$
$\mathbf{id}$	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
$\boldsymbol{r}_1$	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
$\boldsymbol{r}_2$	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
$\boldsymbol{r}_3$	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
$\boldsymbol{f}_v$	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
$\boldsymbol{f}_h$	f_h	f_c	f_v	f_d	r_2	id	r_3	r_1
$\boldsymbol{f}_d$	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
$\boldsymbol{f}_c$	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

$$0^\circ < \alpha < 360^\circ$$

$$0^\circ < \beta < 360^\circ$$

Consideremos dos ángulos α y β menores que una vuelta completa, esto es, menores que 360°

$H = \{ \ id, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3 \ \}$

$\circ$	**id**	$\boldsymbol{r_1}$	$\boldsymbol{r_2}$	$\boldsymbol{r_3}$	$\boldsymbol{f_v}$	$\boldsymbol{f_h}$	$\boldsymbol{f_d}$	$\boldsymbol{f_c}$
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
$\boldsymbol{r_1}$	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
$\boldsymbol{r_2}$	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
$\boldsymbol{r_3}$	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
$\boldsymbol{f_v}$	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
$\boldsymbol{f_h}$	f_h	f_c	f_v	f_d	r_2	id	r_3	r_1
$\boldsymbol{f_d}$	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
$\boldsymbol{f_c}$	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

$$0^\circ < \alpha < 360^\circ$$

$$0^\circ < \beta < 360^\circ$$

$$\alpha + \beta < 360^\circ$$

Supongamos en primer lugar que la suma de estos ángulos es menor que una vuelta completa.

$$H = \{ \; id, \quad r_1 , \quad r_2 , \quad r_3 \; \}$$

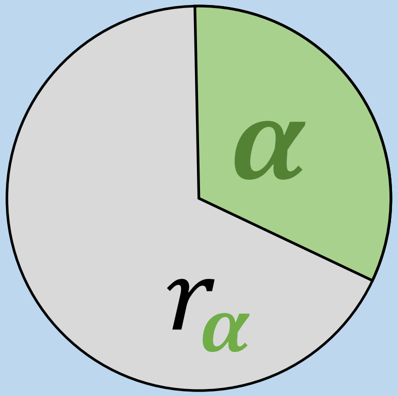
$\circ$	**id**	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
f_h	f_h	f_c	f_v	f_d	r_2	id	r_3	r_1
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

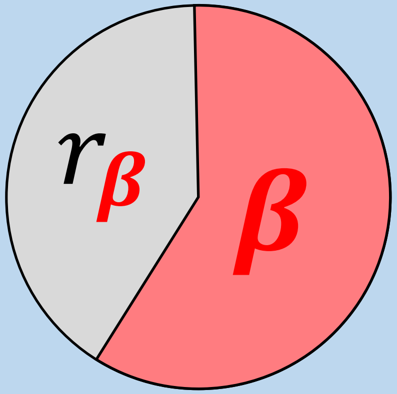
$$0^\circ < \alpha < 360^\circ$$

$$0^\circ < \beta < 360^\circ$$

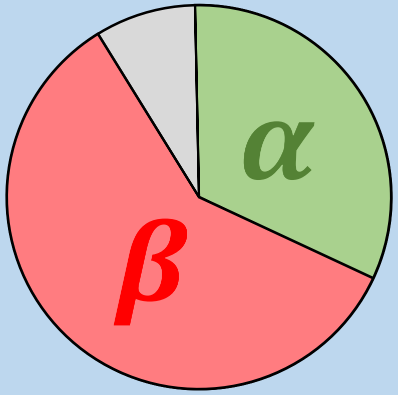
$$\alpha + \beta < 360^\circ$$

La composición de dos rotaciones de ángulos α y β es independientemente del orden en que las compongamos otra rotación de ángulo $\alpha + \beta$





$$r_\alpha \circ r_\beta$$
$$= r_\beta \circ r_\alpha$$
$$= r_{\alpha + \beta}$$



$$H = \{\ id,\quad r_1,\quad r_2,\quad r_3\ \}$$

$\circ$	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3				
r_1	r_1	r_2	$\boxed{r_3}$	id				
r_2	r_2	$\boxed{r_3}$	id	r_1				
r_3	r_3	id	r_1	r_2				
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c				
f_h	f_h	f_c	f_v	f_d				
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v				
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h				

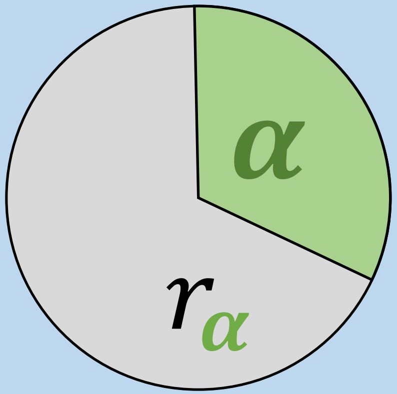
Por ejemplo, si componemos la rotación r_1 de 90° y la rotación r_2 de 180° en cualquier orden, el resultado es la rotación de $90^\circ + 180^\circ = 270^\circ$, esto es la rotación r_2

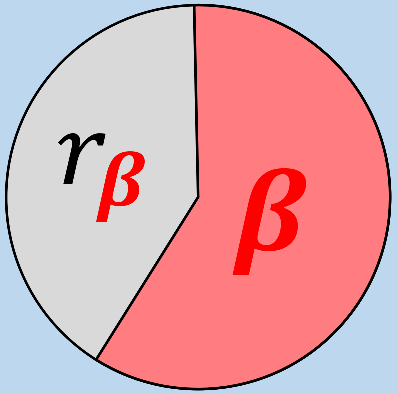
$$0^\circ < \alpha < 360^\circ$$

$$0^\circ < \beta < 360^\circ$$

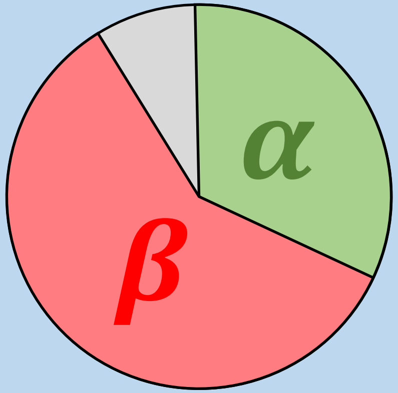
$$\alpha + \beta < 360^\circ$$

La composición de dos rotaciones de ángulos α y β es independientemente del orden en que las compongamos otra rotación de ángulo $\alpha + \beta$





$$r_\alpha \circ r_\beta = r_\beta \circ r_\alpha = r_{\alpha+\beta}$$



$$H = \{ \; id, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3 \; \}$$

$$0^\circ < \alpha < 360^\circ$$

$$0^\circ < \beta < 360^\circ$$

$$\alpha + \beta > 360^\circ$$

Supongamos ahora que la suma de estos ángulos es mayor que una vuelta completa.

$\circ$	**id**	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
f_h	f_h	f_c	f_v	f_d	r_2	id	r_3	r_1
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

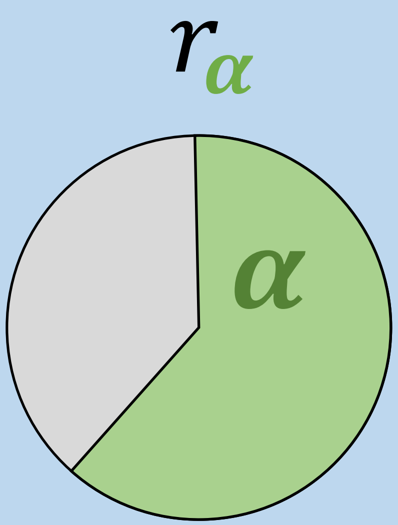
$H = \{ \; id, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3 \; \}$

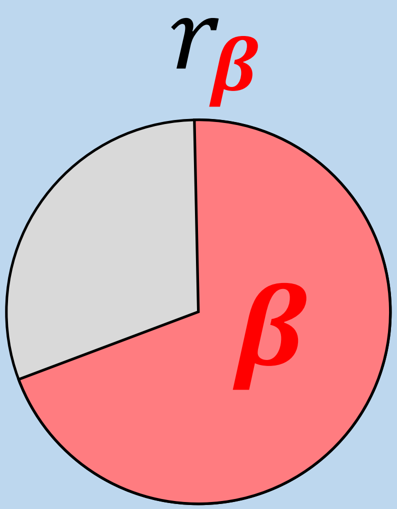
$\circ$	**id**	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
f_h	f_h	f_c	f_v	f_d	r_2	id	r_3	r_1
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

$$0^\circ < \alpha < 360^\circ$$

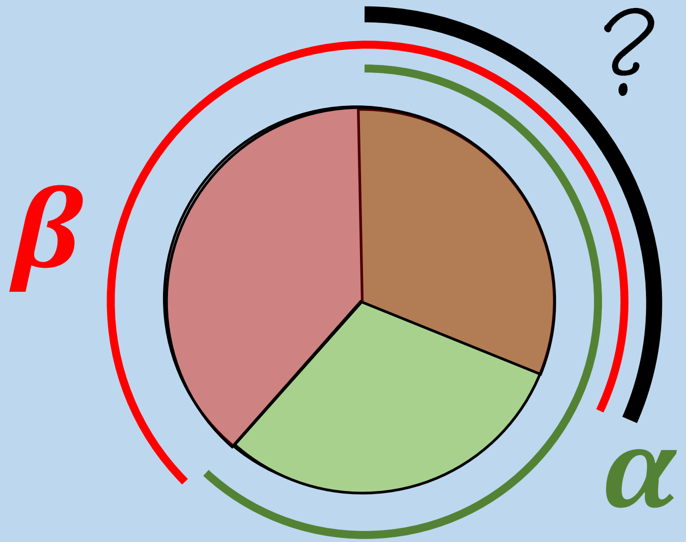
$$0^\circ < \beta < 360^\circ$$

$$\alpha + \beta > 360^\circ$$





En este caso, al hacer una rotación seguida de la otra, nos pasamos de una vuelta completa y solo nos interesa el ángulo en el que sobrepasamos a 360°.



$H = \{ \ id, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3 \ \}$

$\circ$	**id**	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
f_h	f_h	f_c	f_v	f_d	r_2	id	r_3	r_1
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

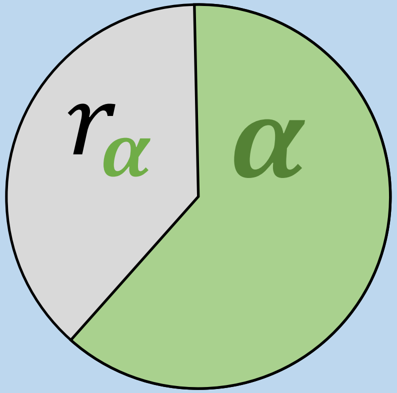
$$0^\circ < \alpha < 360^\circ$$

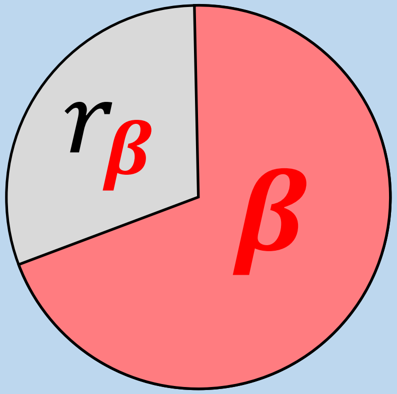
$$0^\circ < \beta < 360^\circ$$

$$\alpha + \beta > 360^\circ$$

Para calcular este ángulo havemos la división de a $\alpha + \beta$ entre 360° y el ángulo γ buscado es justamente el resto.

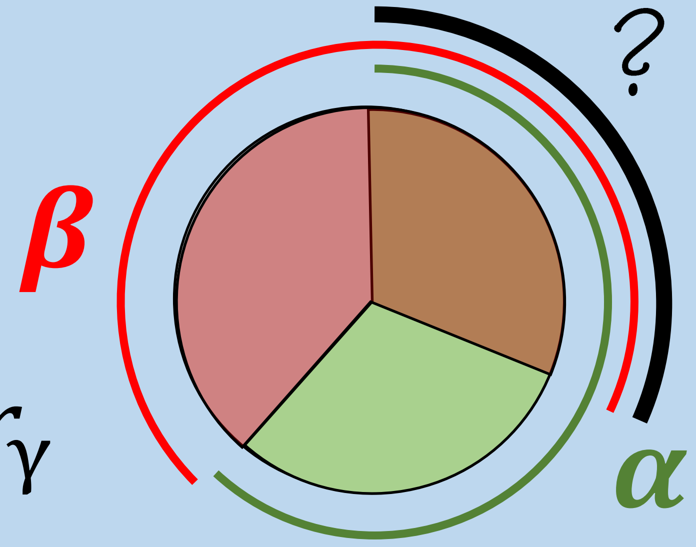
$$\begin{array}{r|l} \alpha + \beta & 360^\circ \\ \hline \gamma & 1 \end{array}$$





$$r_\alpha \circ r_\beta$$

$$= r_\beta \circ r_\alpha = r_\gamma$$



$H = \{\ id,\quad r_1,\quad r_2,\quad r_3\ \}$

$0^\circ < \alpha < 360^\circ$

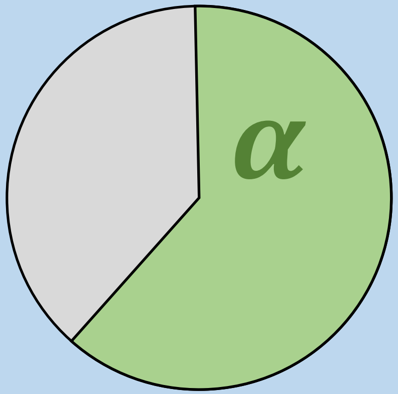
$0^\circ < \beta < 360^\circ$

$\alpha + \beta > 360^\circ$

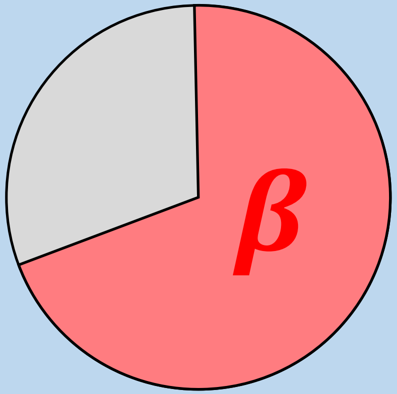
$\circ$	**id**	r_1	r_2	r_3
id	id	r_1	r_2	r_3
r_1	r_1	r_2	r_3	id
r_2	r_2	r_3	id	$\boxed{r_1}$
r_3	r_3	id	$\boxed{r_1}$	r_2
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c
f_h	f_h	f_c	f_v	f_d
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h

En efecto, si componemos la rotación r_2 de 180° y la rotación r_3 de 270° en cualquier orden, para calcular el resultado hacemos la división de $180^\circ + 270^\circ = 450^\circ$, entre 360° que tiene como cociente 1 y como resto 90°. Esto nos dice que el resultado es la rotación r_1.

r_α



r_β

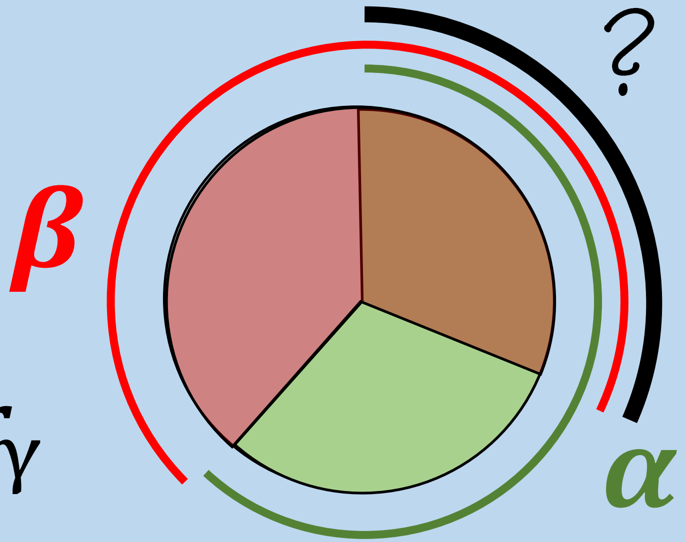


$\alpha + \beta \;\big|\; 360^\circ$

$\gamma \qquad 1$

$r_\alpha \circ r_\beta$

$= r_\beta \circ r_\alpha = r_\gamma$



EJEMPLO

$$\mathbb{Z}_n = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ , n-1\ \}$$

La discusión sobre el subgrupo de las rotaciones nos lleva a presentar un nuevo ejemplo de grupo. Dado n un entero positivo fijo, consideramos el cojunto $\mathbb{Z}_n$ formado por los enteros entre 0 y $n-1$.

EJEMPLO

$$\mathbb{Z}_n = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ , n-1\ \}$$

$$i, j\ \in \mathbb{Z}_n \qquad i + j = \begin{cases} i + j & \text{si} \quad i + j < n \\ & \end{cases}$$

Para suma dos elementos de este conjunto, hacemos la suma normal si esta es menor que n.

EJEMPLO

$$\mathbb{Z}_n = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,n-1\ \}$$

$$i,j\ \in \mathbb{Z}_n \qquad i+j = \begin{cases} i+j & \text{si}\quad i+j<n \\ \overline{i+j} & \text{si}\quad i+j \geq n \end{cases}$$

En caso de que la suma sea mayor o igual que n, tomamos el resto de dividir la suma $i+j$ entre n.

$$\begin{array}{l|l} i+j & n \\ \hline \boxed{\overline{i+j}} & 1 \end{array}$$

EJEMPLO

$$\mathbb{Z}_n = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n-1\ \}$$

$$i, j \in \mathbb{Z}_n \qquad i + j = \begin{cases} i+j & \text{si} \quad i+j < n \\ \overline{} & \\ i+j & \text{si} \quad i+j \geq n \end{cases}$$

Se puede comprobar que $\mathbb{Z}_n$ con esta operación es un grupo, pero lo realmente interesante es que si nos fijamos el grupo $\mathbb{Z}_4$ se "parece", esto es, se "comporta" de forma similar a como lo hace el subgrupo de rotaciones del cuadrado. Esta idea de que dos grupos se comporten igual la exploraremos en próximos capítulos.

$$\mathbb{Z}_4 = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ \} \qquad H = \{\ id,\ r_1\ ,\ r_2\ ,\ r_3\ \}$$

Sea $\boldsymbol{S}$ un subconjunto no vacío de un grupo $(\boldsymbol{G}, \circ)$.

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \; a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \; | \; a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \; \}$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ | \ a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

EJEMPLO

$$S = \{ g, h \} \qquad g^1 h^1 h^1 g^{-1} h^{-1} g^1 \in < S >$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $<S>$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$<S> = \{\ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ \mid a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m\ \}$$

TEOREMA $<S>$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

◆ $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \in <S>$ $\quad b_1^{\delta_1} b_2^{\delta_2} \cdots b_n^{\delta_n} \in <S>$

$$(a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m})(b_1^{\delta_1} b_2^{\delta_2} \cdots b_n^{\delta_n}) = a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} b_1^{\delta_1} b_2^{\delta_2} \cdots b_n^{\delta_n} \in <S>$$

$<S>$ es cerrado para la operación $\circ$ del grupo.

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ | \ a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $g^1 g^{-1} \in < S >$ $\qquad g^1 g^{-1} = id \in < S >$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ | \ a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$ $\qquad a_m^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1} \in < S >$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ | \ a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$ $\qquad$ $a_m^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1} \in < S >$

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} \boxed{a_m^{\varepsilon_m} \ a_m^{-\varepsilon_m}} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1}$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ \mid a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$ $\qquad$ $a_m^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1} \in < S >$

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} \boxed{\ id \ } a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1}$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ | \ a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$ $\quad$ $a_m^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1} \in < S >$

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots \boxed{a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1}$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ \mid a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$ $\quad a_m^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1} \in < S >$

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots \boxed{id} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1}$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ | \ a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$ $\qquad a_m^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1} \in < S >$

$$a_1^{\varepsilon_1} \boxed{a_2^{\varepsilon_2} \ a_2^{-\varepsilon_2}} a_1^{-\varepsilon_1}$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ | \ a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$ $\quad$ $a_m^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1} \in < S >$

$$a_1^{\varepsilon_1} \boxed{id} a_1^{-\varepsilon_1}$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ \mid a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$ $\qquad$ $a_m^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1} \in < S >$

$$a_1^{\varepsilon_1} \ a_1^{-\varepsilon_1}$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \; a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \; | \; a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \; \}$$

TEOREMA $< S >$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Demostración:

- $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$ $\quad a_m^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-\varepsilon_{m-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1} \in < S >$

$$id$$

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \ \mid a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \ \}$$

TEOREMA

$< S >$ es el menor subgrupo de $(G, \circ)$ que contiene a S.

Si $H \leq G$ tal que $S \subseteq H$ entonces se tiene que $S \subseteq < S > \leq H$.

Sea S un subconjunto no vacío de un grupo $(G, \circ)$.

Definimos $< S >$ como el subconjunto de palabras formadas por los elementos de S y sus inversos en G.

$$< S > = \{ \; a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \;|\; a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \cdots, m \; \}$$

TEOREMA

$< S >$ es el menor subgrupo de $(G, \circ)$ que contiene a S.

Si $H \leq G$ tal que $S \subseteq H$ entonces se tiene que $S \subseteq < S > \leq H$.

Demostración:

Sea $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \in < S >$

$a_i \in S \subseteq H$ que es un subgrupo

por tanto $a_i^{\varepsilon_i} \in H$

y se tiene que $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_m^{\varepsilon_m} \in H$