Introducción a la teoría de grupos

Ejemplo $$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Comenzaremos con un ejemplo que a todos nos resultará familiar. Los números enteros y la suma.

Introducción a la teoría de grupos

Ejemplo $$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

- Es ***cerrado*** para la suma: $a, b \in \mathbb{Z} \implies a + b \in \mathbb{Z}$

Una propiedad que verifican los números enteros (y que nos puede parecer un poco evidente aunque es fundamental) es que si sumamos dos números enteros, el resultado vuelve a ser un número entero. Decimos que el conjunto es "cerrado" para la suma.

Introducción a la teoría de grupos

Ejemplo $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

- Es ***cerrado*** para la suma: $a, b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{Z}$

- La suma es ***asociativa***:

$$a, b, c \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$$

Otra propiedad que verifica la suma de enteros es que para sumar tres números podemos hacerlo por el principio o por el final y el resultado es el mismo. Decimos que la suma de enteros es ASOCIATIVA.

Introducción a la teoría de grupos

Ejemplo $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

- Es ***cerrado*** para la suma: $a, b \in \mathbb{Z} \implies a + b \in \mathbb{Z}$
- La suma es ***asociativa***:

$$a, b, c \in \mathbb{Z} \implies (a + b) + c = a + (b + c)$$

- El 0 es el elemento ***identidad***:

$$a \in \mathbb{Z} \implies a + 0 = 0 + a = a$$

Además, en los enteros hay un elemento muy especial (el cero) que verifica que si lo sumamos con cualquier otro entero a el resultado vuelve a ser a. A este número cero lo llamamos elemento identidad, o elemento neutro.

Introducción a la teoría de grupos

Ejemplo $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

- Es ***cerrado*** para la suma: $a, b \in \mathbb{Z} \implies a + b \in \mathbb{Z}$

- La suma es ***asociativa***:

$$a, b, c \in \mathbb{Z} \implies (a + b) + c = a + (b + c)$$

- El 0 es el elemento ***identidad***:

$$a \in \mathbb{Z} \implies a + 0 = 0 + a = a$$

- Todo elemento tiene un ***inverso***:

$$a \in \mathbb{Z} \implies \exists\, b \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a + b = b + a = 0$$

Y para terminar, dado cualquier número entero a existe otro número b tal que sumados nos dan el cero. A b se le llama el inverso de a.

Introducción a la teoría de grupos

Ejemplo

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

- Es ***cerrado*** para la suma: $a, b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{Z}$
- La suma es ***asociativa***:

$$a, b, c \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$$

- El 0 es el elemento ***identidad***:

$$a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a + 0 = 0 + a = a$$

- Todo elemento tiene un ***inverso***:

$$a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \exists\, b \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a + b = b + a = 0$$

Cuando utilizamos la operación suma a este elemento se le suele llamar también opuesto y en el caso de los enteros, el opuesto de a es justamente –a.

$$\boxed{b = -a}$$

Introducción a la teoría de gru

Si abstraemos estas propiedades tenemos la definición de GRUPO. Esto es, un grupo no es más que un conjunto G junto con una operación, que denotaremos con un punto, que verifica cuatro propiedades:

Definición

Un ***grupo*** es un conjunto $\boldsymbol{G}$ junto con una operación $\circ$ que satisface las siguientes propiedades:

- Es ***cerrado*** para la operación $\circ$: $a, b \in \boldsymbol{G} \Longrightarrow a \circ b \in \boldsymbol{G}$
- La operación es ***asociativa***:

$$a, b, c \in \boldsymbol{G} \Longrightarrow (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

- Existe un elemento ***identidad*** denotado por $\boldsymbol{id}$:

$$a \in \boldsymbol{G} \Longrightarrow a \circ \boldsymbol{id} = \boldsymbol{id} \circ a = a$$

- Todo elemento tiene un ***inverso*** :

$$a \in \boldsymbol{G} \Longrightarrow \exists\, b \in \boldsymbol{G} \text{ tal que } a \circ b = b \circ a = \boldsymbol{id}$$

$$b = a^{-1}$$

Introducción a la teoría de grupos

Definición

Un ***grupo*** es un conjunto $\boldsymbol{G}$ junto con una operación $\circ$ que satisface las siguientes propiedades:

- Es ***cerrado*** para la operación $\circ$: $a, b \in \boldsymbol{G} \implies a \circ b \in \boldsymbol{G}$
- La operación es ***asociativa***:

  $$a, b, c \in \boldsymbol{G} \implies (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

- Existe un elemento ***identidad*** denotado por $\boldsymbol{id}$:

  $$a \in \boldsymbol{G} \implies a \circ \boldsymbol{id} = \boldsymbol{id} \circ a = a$$

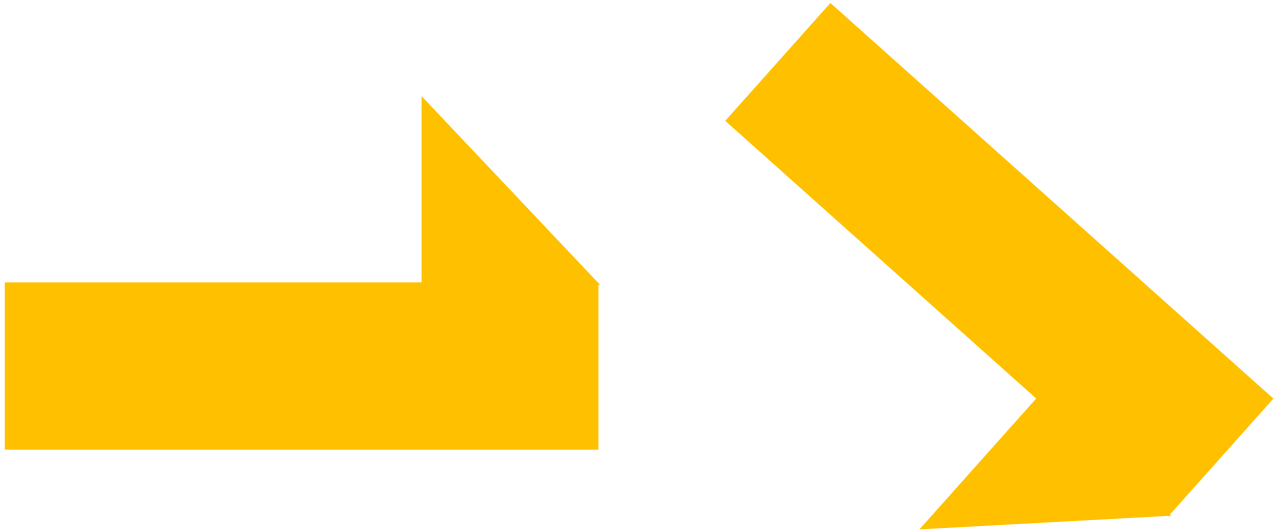
- Todo elemento tiene un ***inverso*** :

  $$a \in \boldsymbol{G} \implies \exists\, b \in \boldsymbol{G} \text{ tal que } a \circ b = b \circ a = \boldsymbol{id}$$

Cuando utilizamos el punto para la operación, esto es, la notación multiplicativa, el inverso se designa por a elevado a -1.

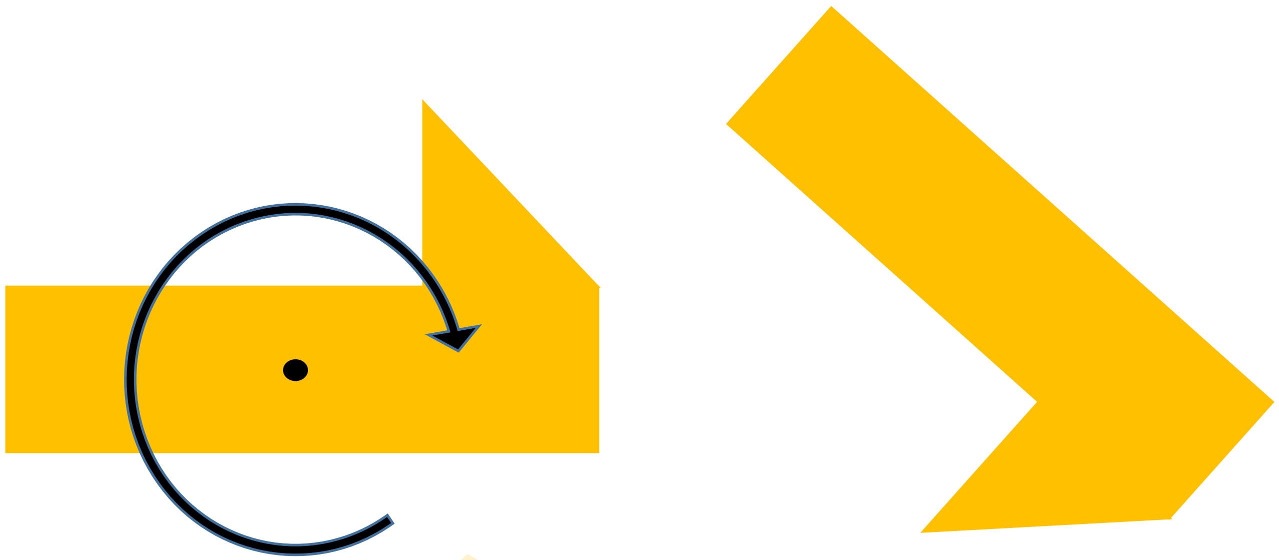
$$b = a^{-1}$$

Dos figuras son ***congruentes*** si puede convertirse una en la otra usando una combinación de rotaciones, reflexiones y traslaciones



Veamos que estas dos figuras son, en efecto, congruentes.

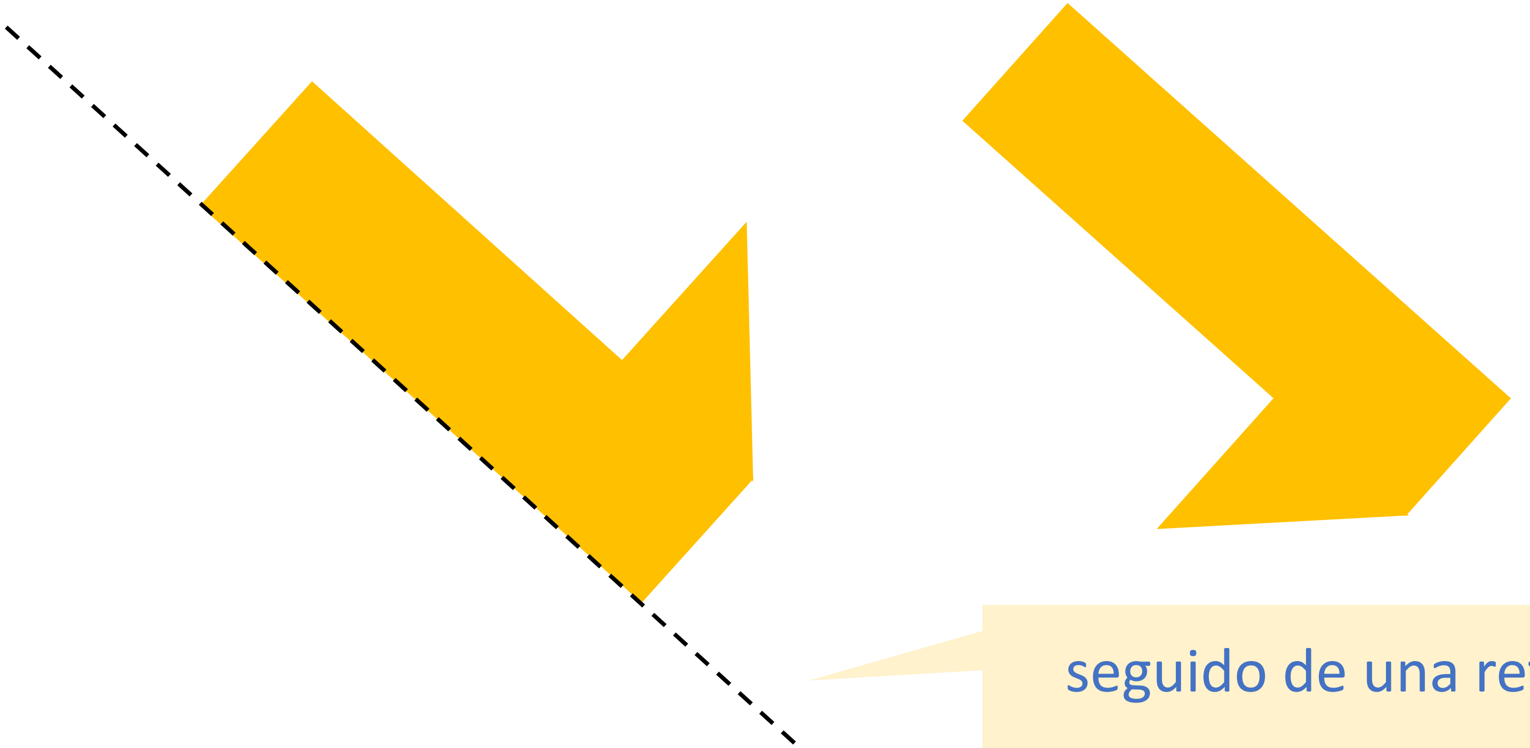
Dos figuras son ***congruentes*** si puede convertirse una en la otra usando una combinación de rotaciones, reflexiones y traslaciones



Primero aplicamos un giro

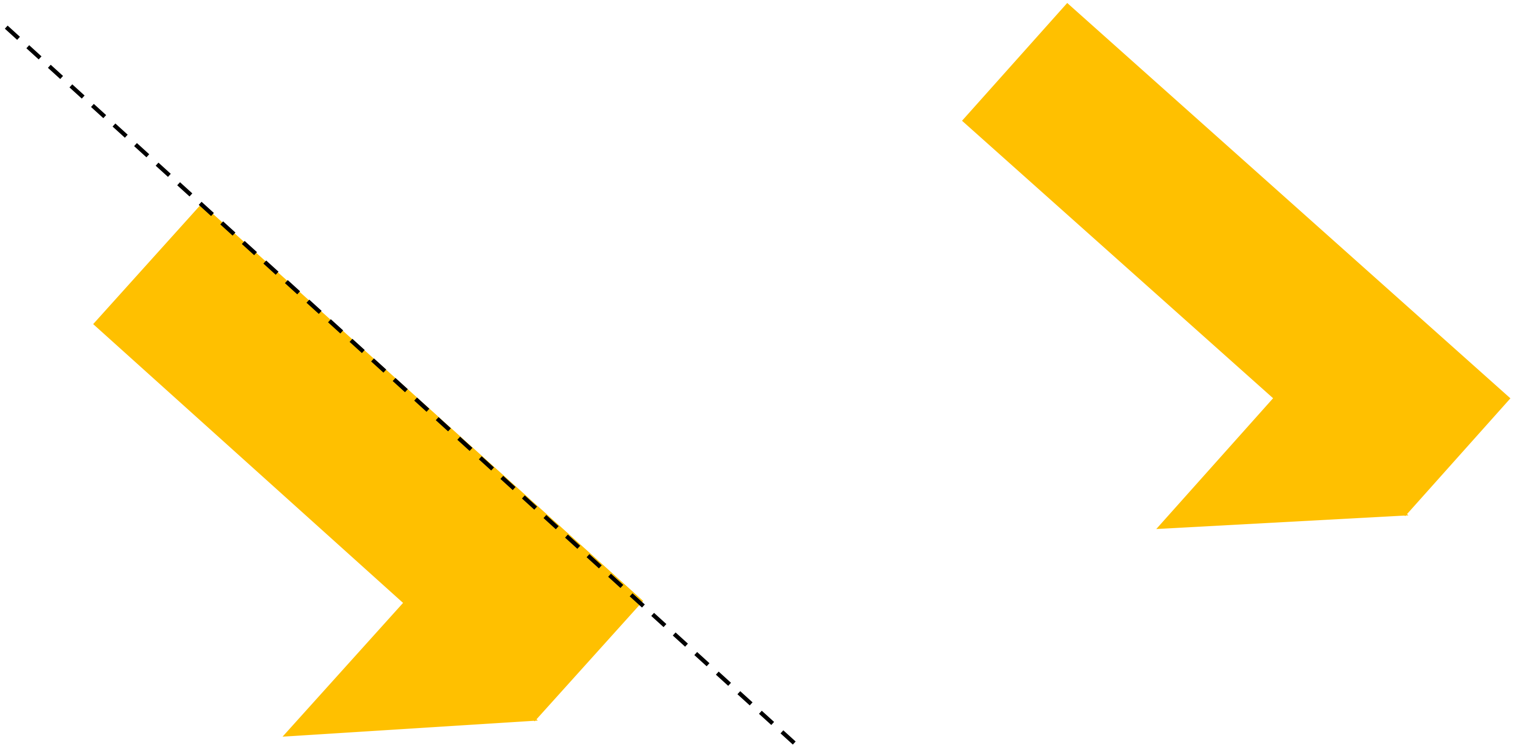
Dos figuras son ***congruentes*** si puede convertirse una en la otra usando una combinación de rotaciones, reflexiones y traslaciones

Dos figuras son ***congruentes*** si puede convertirse una en la otra usando una combinación de rotaciones, reflexiones y traslaciones

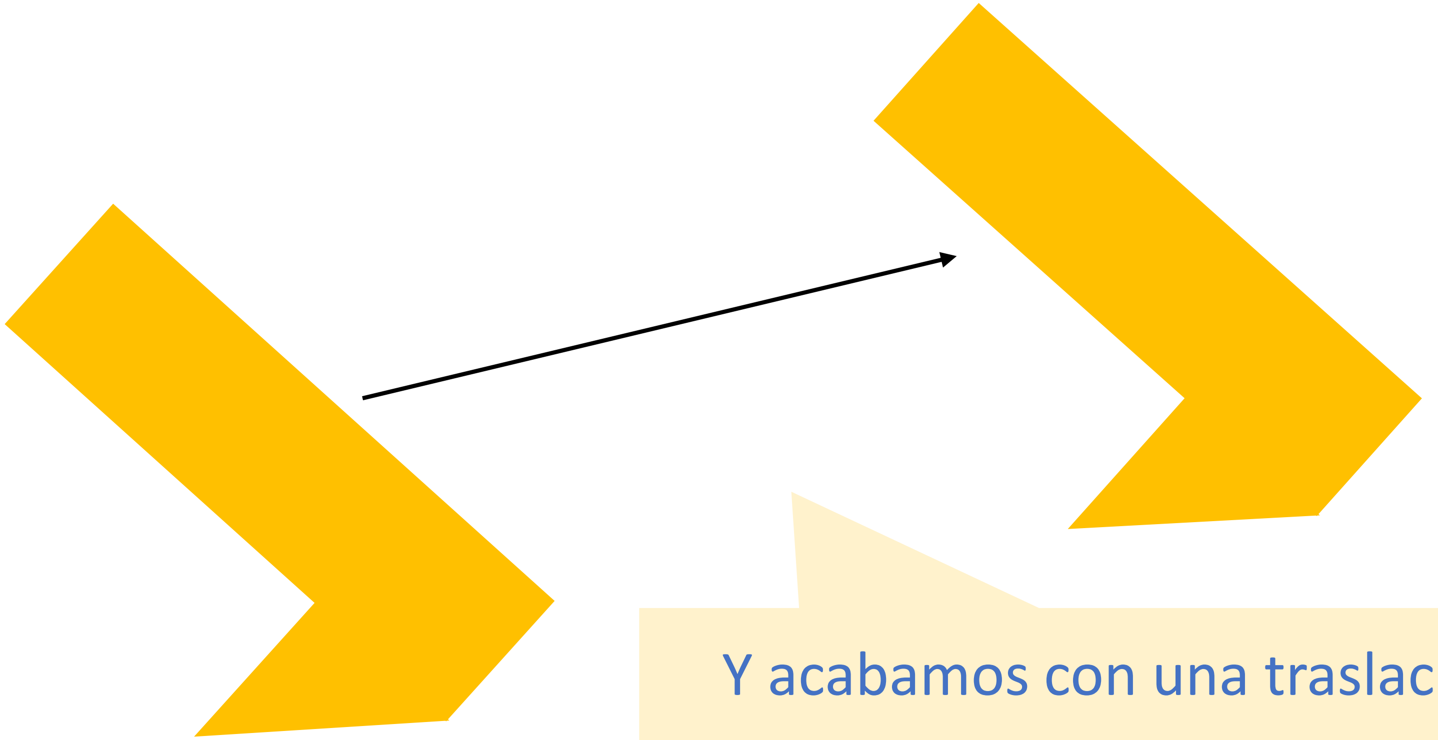


seguido de una reflexión

Dos figuras son ***congruentes*** si puede convertirse una en la otra usando una combinación de rotaciones, reflexiones y traslaciones

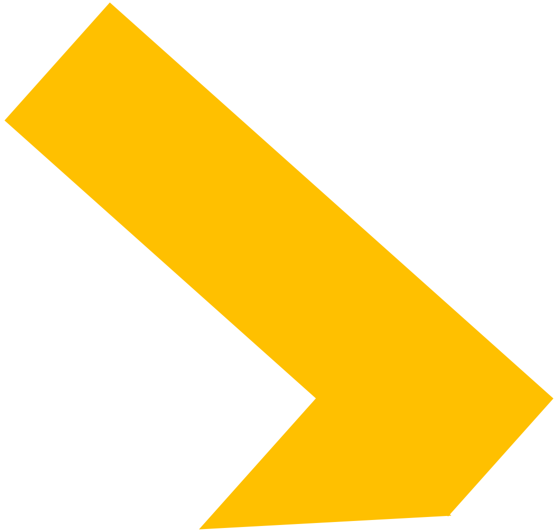


Dos figuras son ***congruentes*** si puede convertirse una en la otra usando una combinación de rotaciones, reflexiones y traslaciones



Y acabamos con una traslación

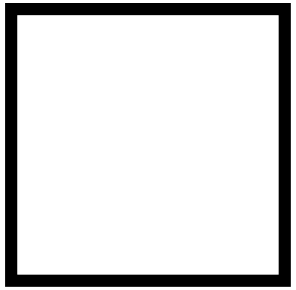
Dos figuras son ***congruentes*** si puede convertirse una en la otra usando una combinación de rotaciones, reflexiones y traslaciones



Hemos superpuesto la figura de la izquierda sobre la de la derecha

Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

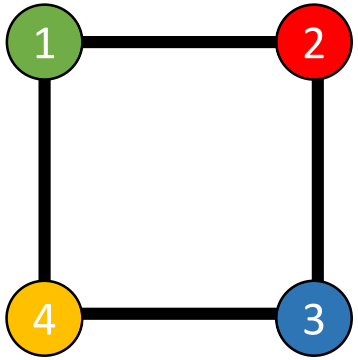
Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.



A las diferentes formas en que una figura es congruente consigo misma se le conoce como SIMETRÍAS.

Veamos las simetrías de un cuadrado.

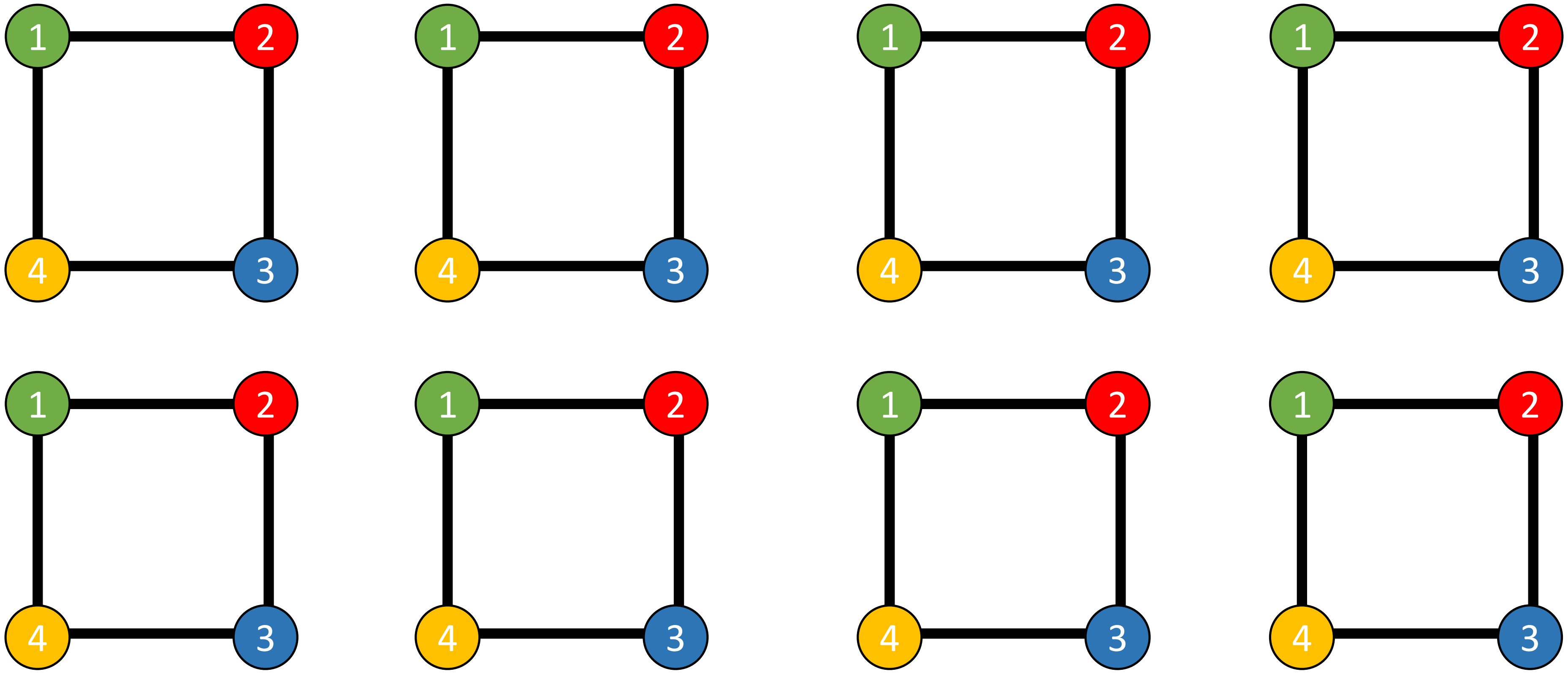
Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.



Para entender con más claridad lo que vamos a hacer etiquetaremos con un número y un color diferentes los cuatro vértices del cuadrado.

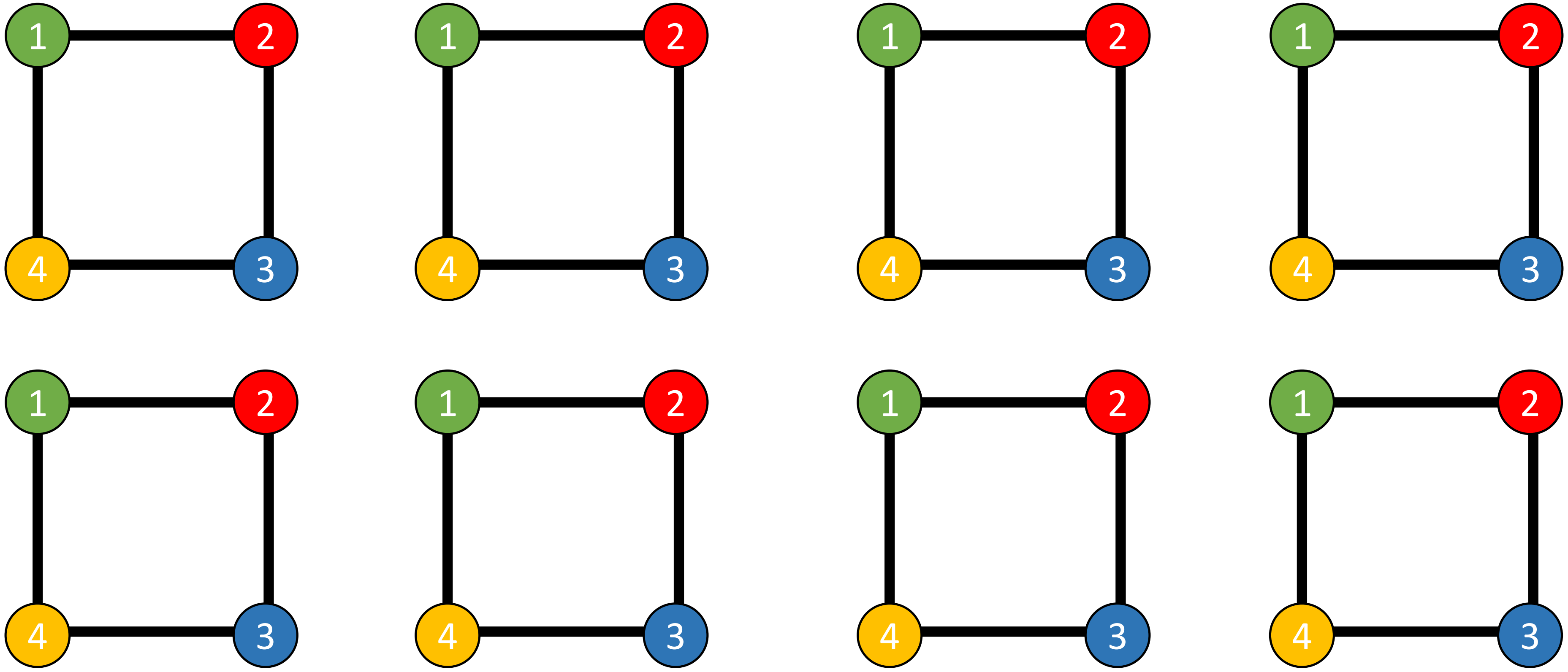
Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

¡Pues vamos a ver que el cuadrado tiene exactamente 8 simetrías o movimientos que dejan el cuadrado inalterado!



Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

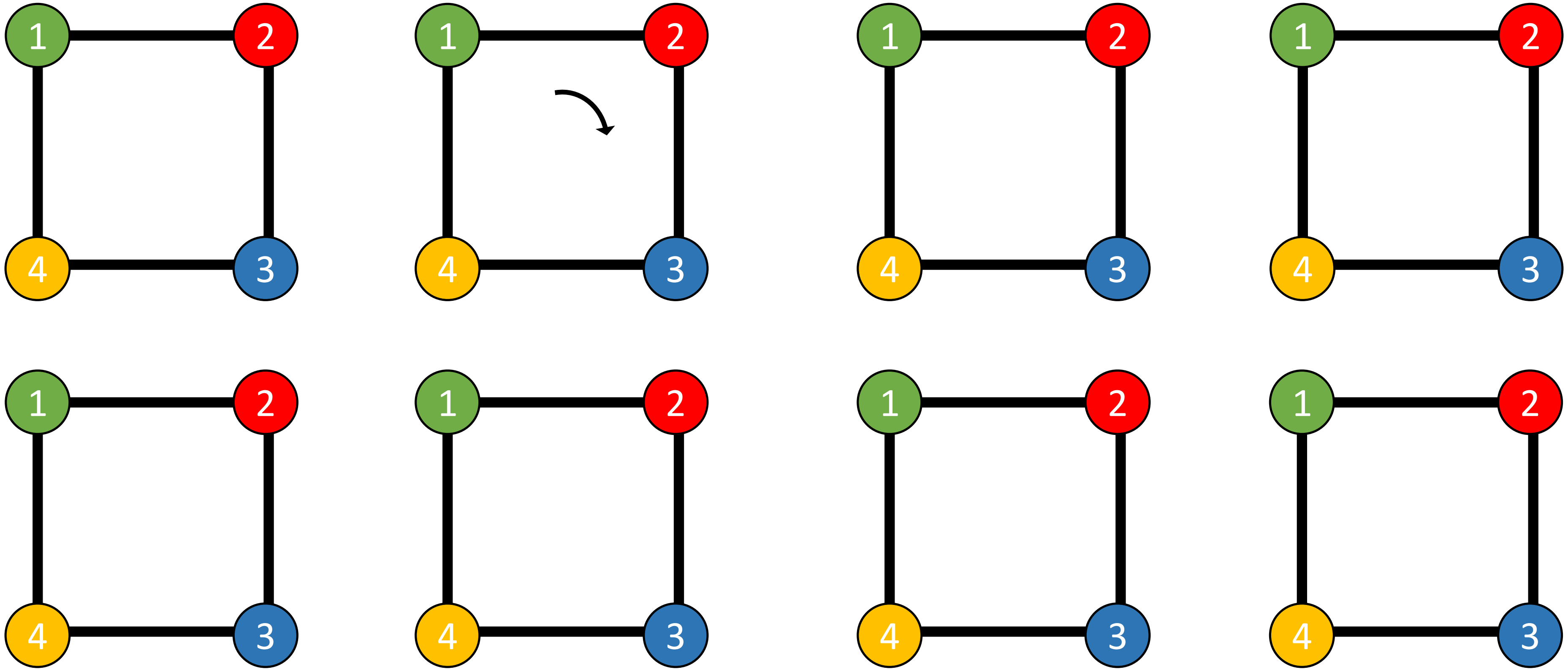
id (dejarlo como está)



Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

id (dejarlo como está)

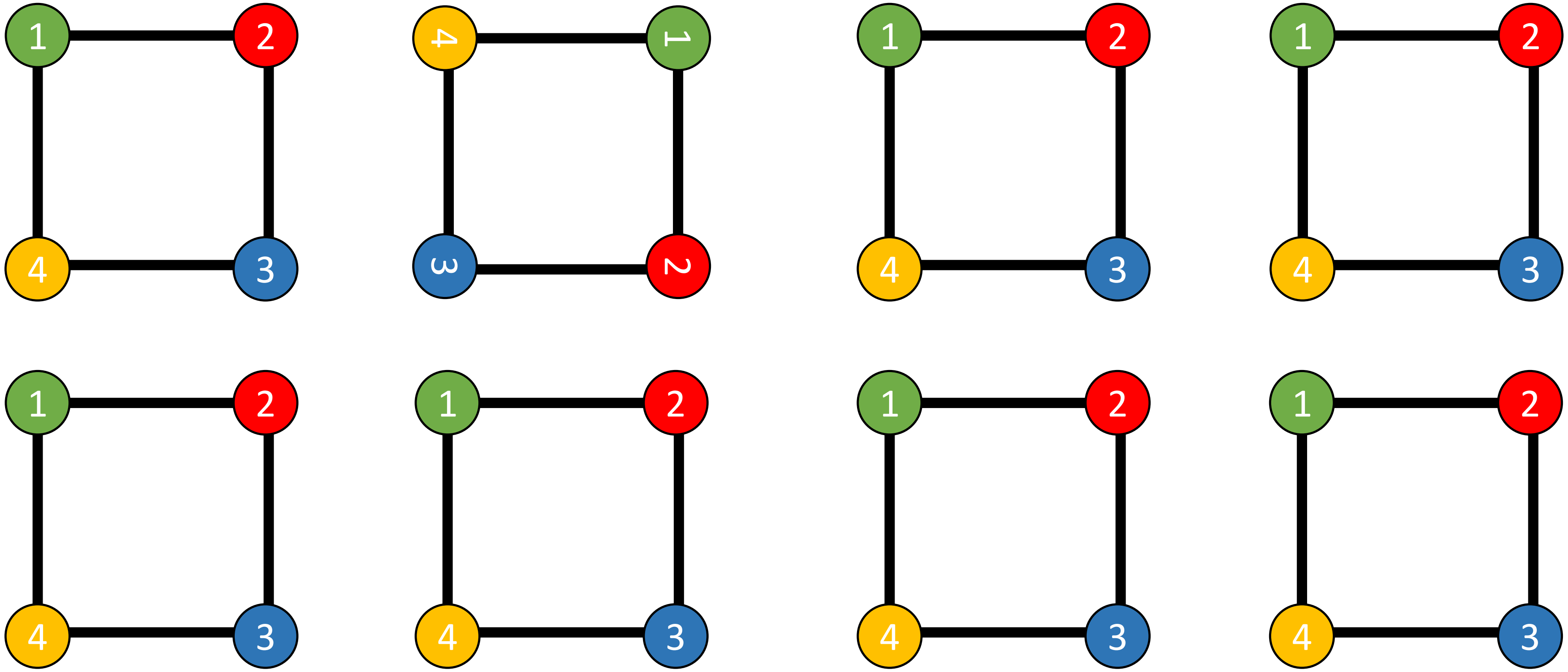
r_1 (rotar 90° en el sentido de las agujas del reloj)



Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

id (dejarlo como está)

r_1 (rotar 90° en el sentido de las agujas del reloj)

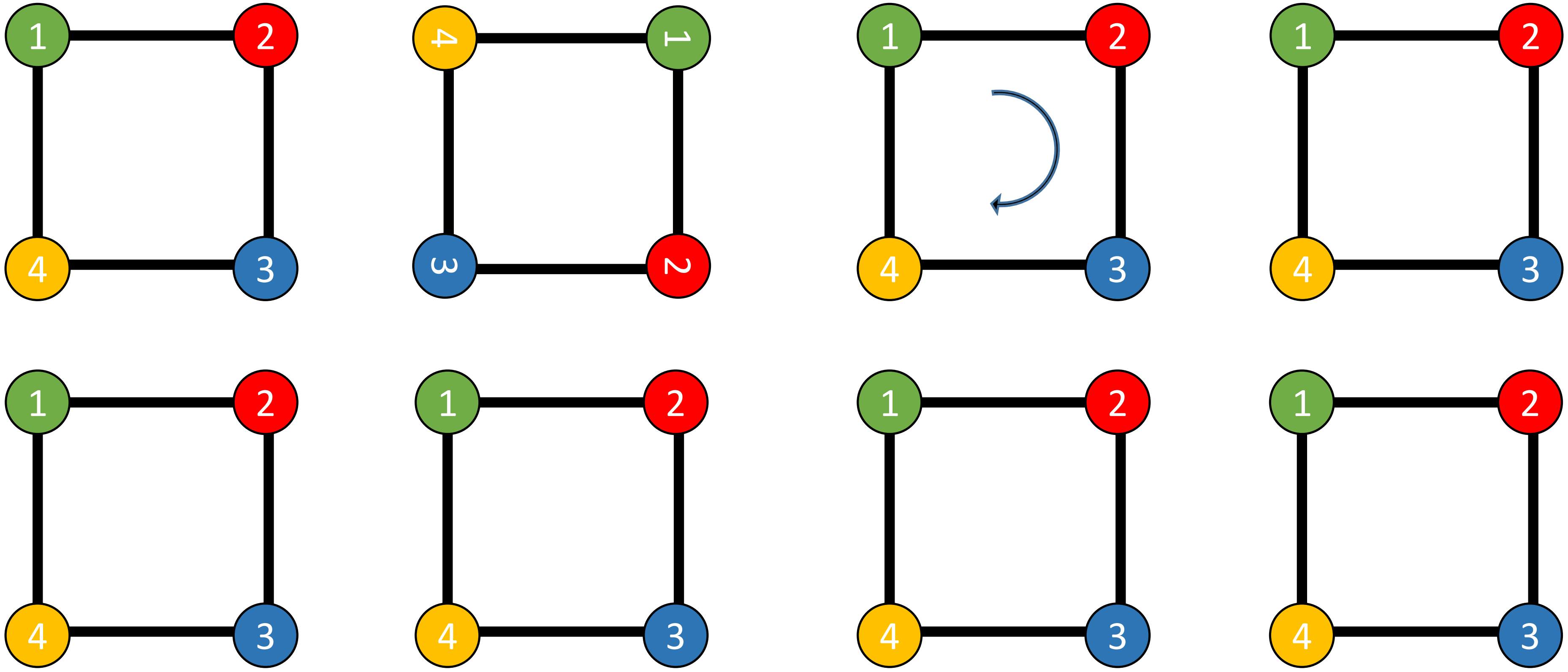


Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

id (dejarlo como está)

r_1 (rotar 90° en el sentido de las agujas del reloj)

r_2 (rotar 180° en el sentido de las agujas del reloj)

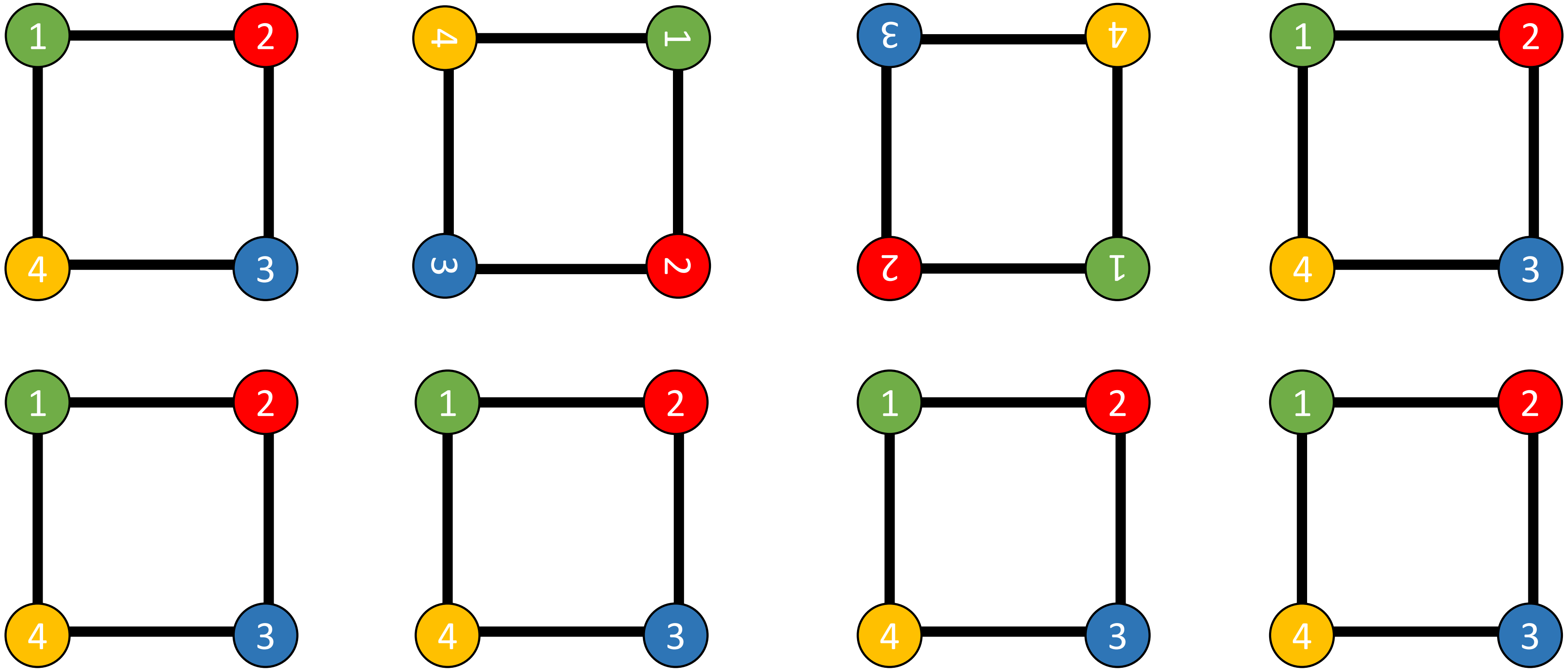


Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

id (dejarlo como está)

r_1 (rotar 90° en el sentido de las agujas del reloj)

r_2 (rotar 180° en el sentido de las agujas del reloj)



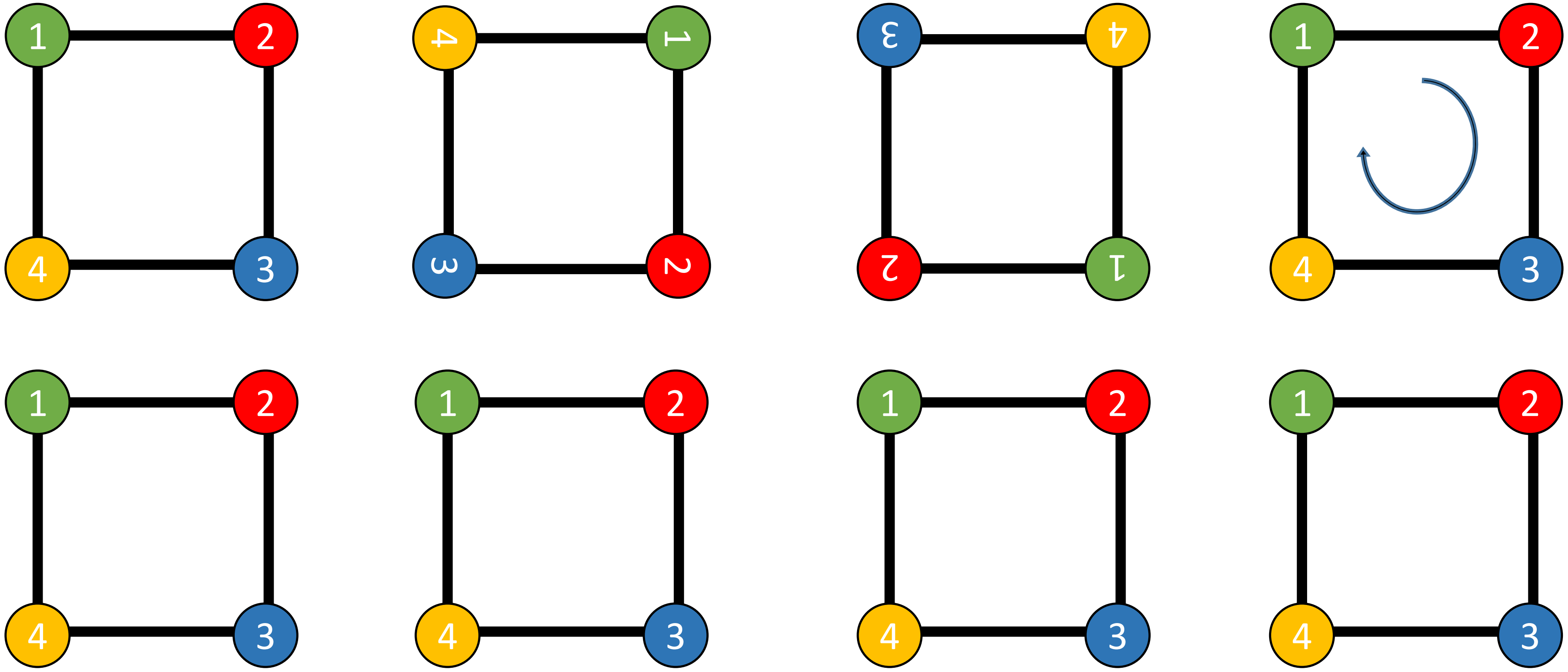
Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

id (dejarlo como está)

r_1 (rotar 90° en el sentido de las agujas del reloj)

r_2 (rotar 180° en el sentido de las agujas del reloj)

r_3 (rotar 270° en el sentido de las agujas del reloj)



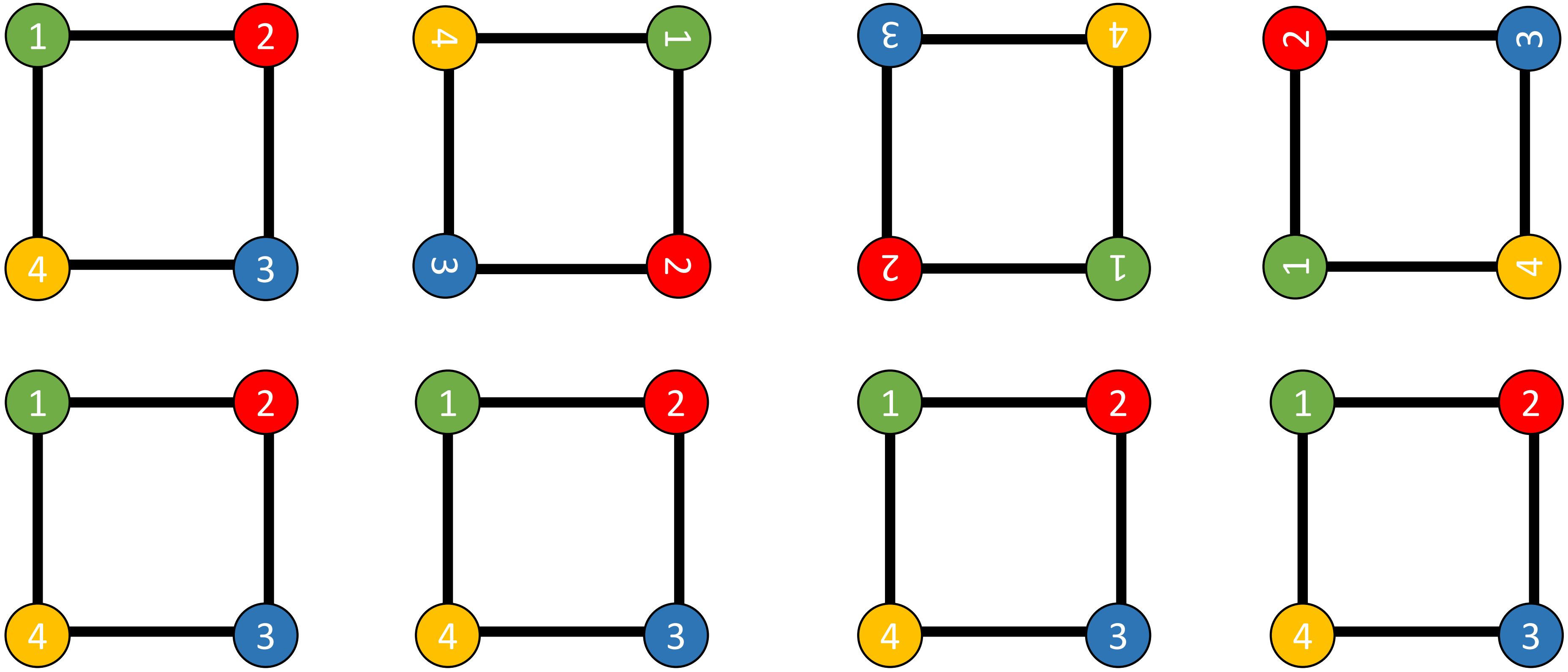
Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

id (dejarlo como está)

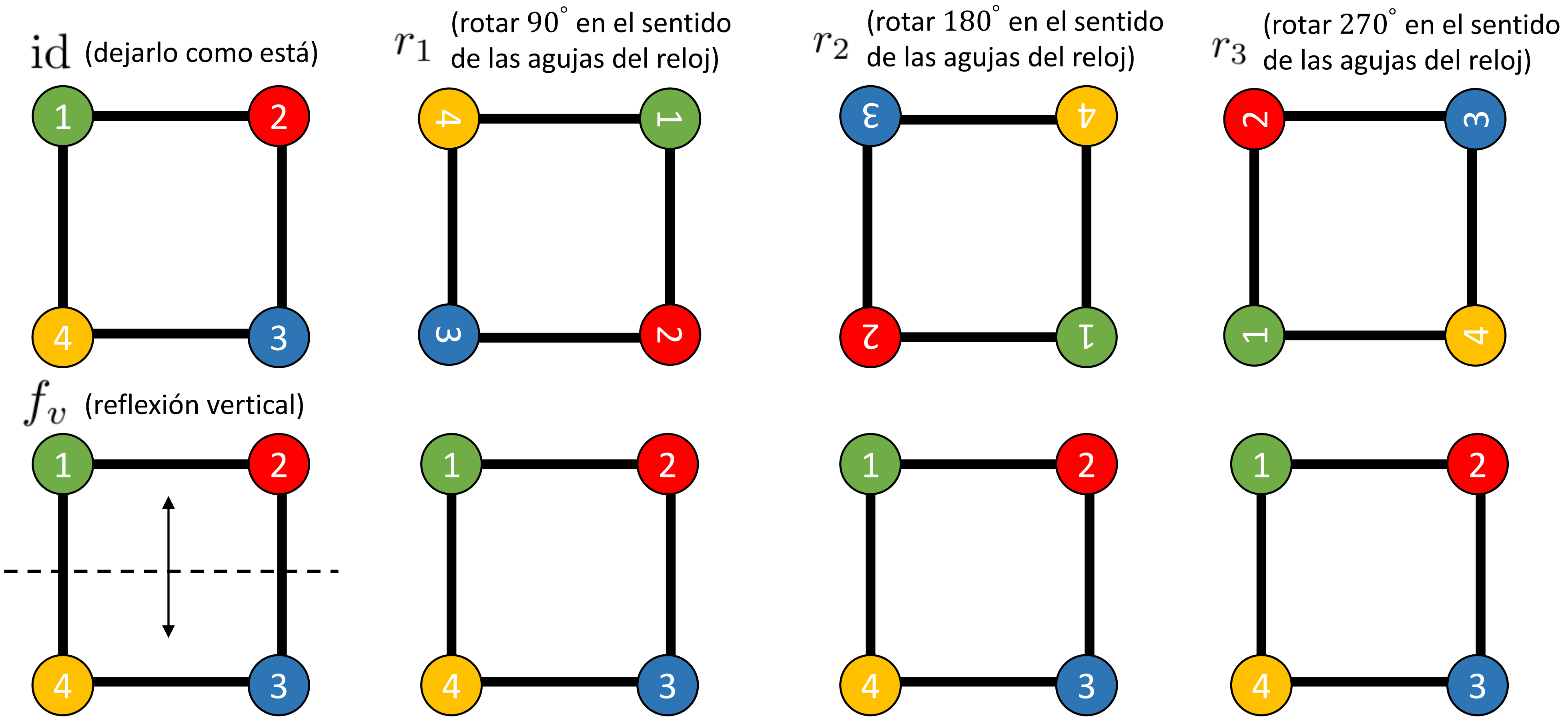
r_1 (rotar 90° en el sentido de las agujas del reloj)

r_2 (rotar 180° en el sentido de las agujas del reloj)

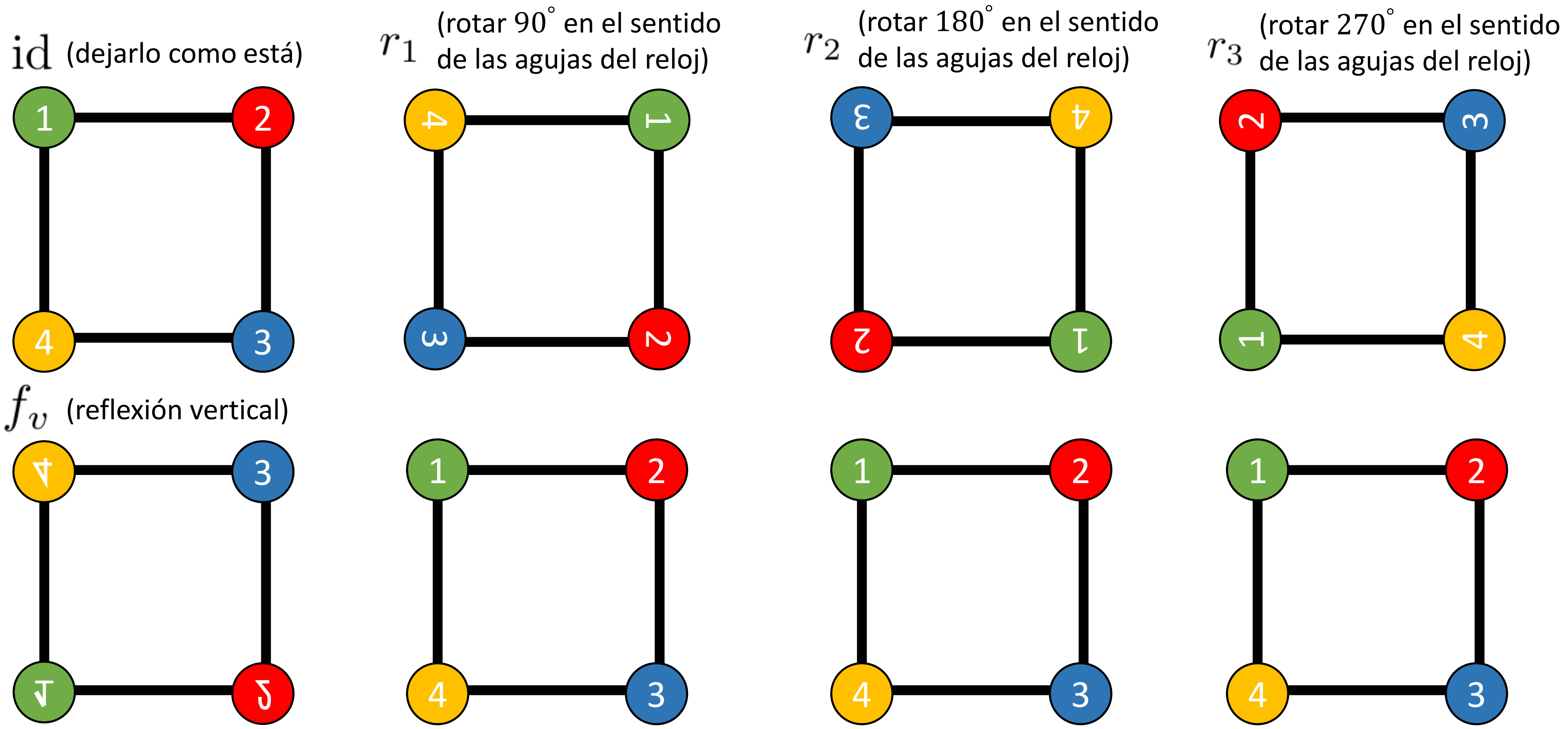
r_3 (rotar 270° en el sentido de las agujas del reloj)



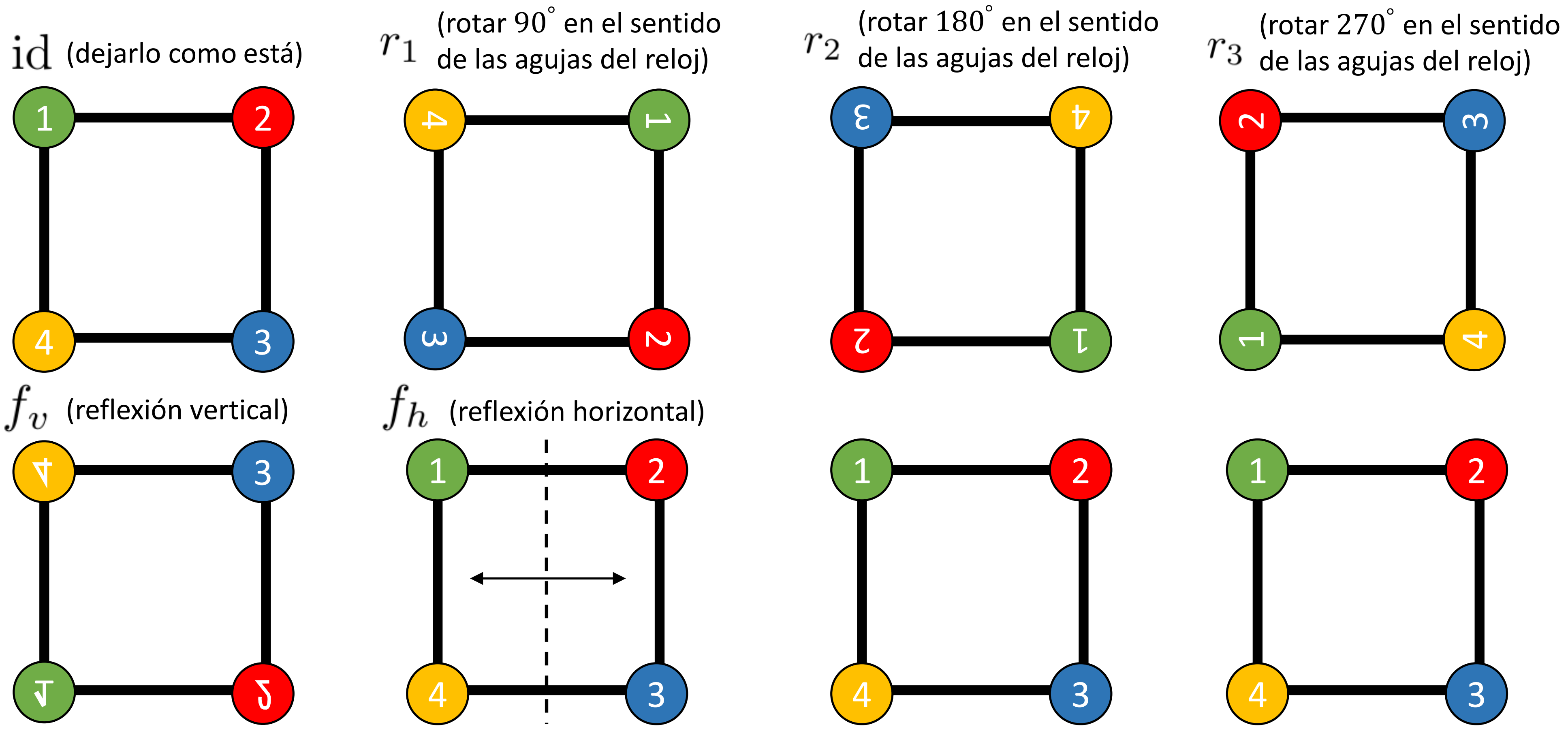
Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.



Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

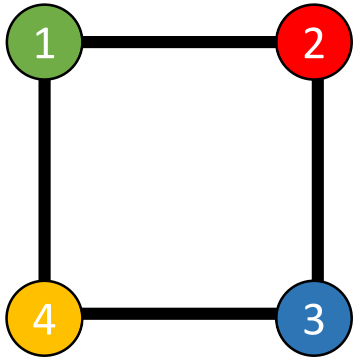


Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

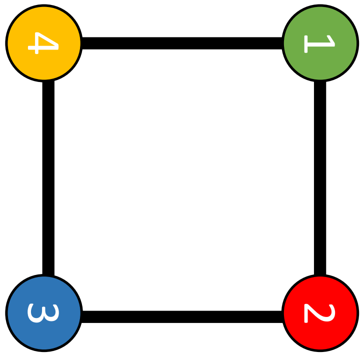


Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

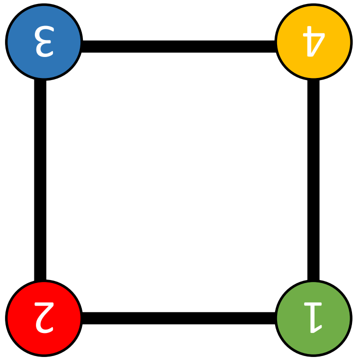
id (dejarlo como está)



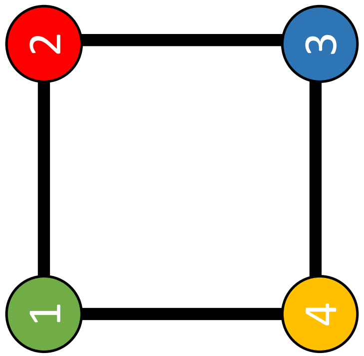
r_1 (rotar 90° en el sentido de las agujas del reloj)



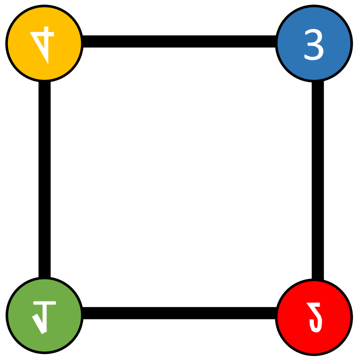
r_2 (rotar 180° en el sentido de las agujas del reloj)



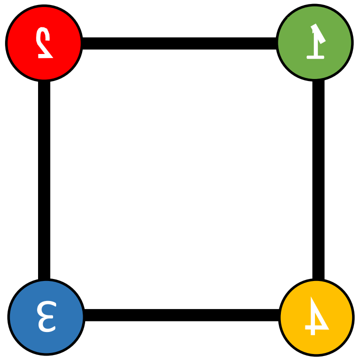
r_3 (rotar 270° en el sentido de las agujas del reloj)

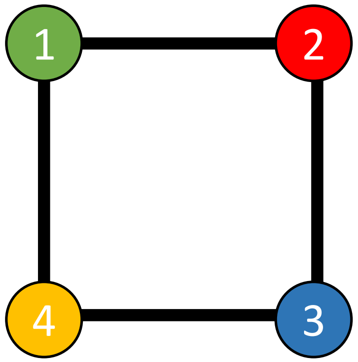


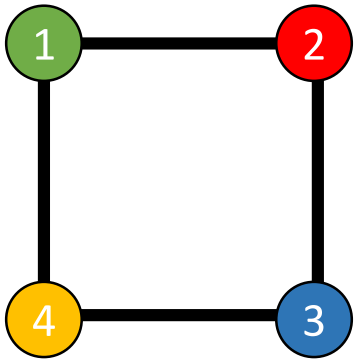
f_v (reflexión vertical)



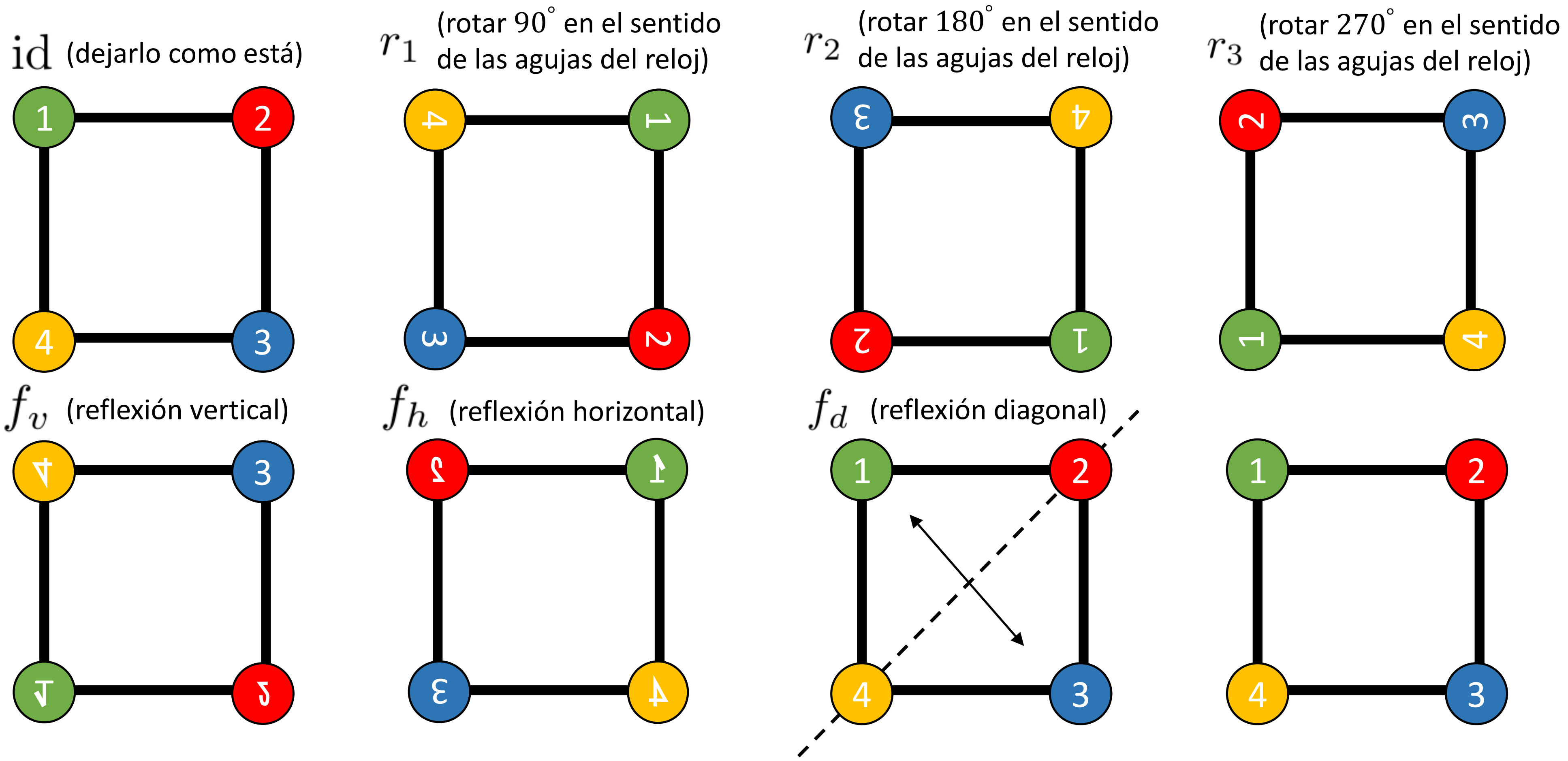
f_h (reflexión horizontal)



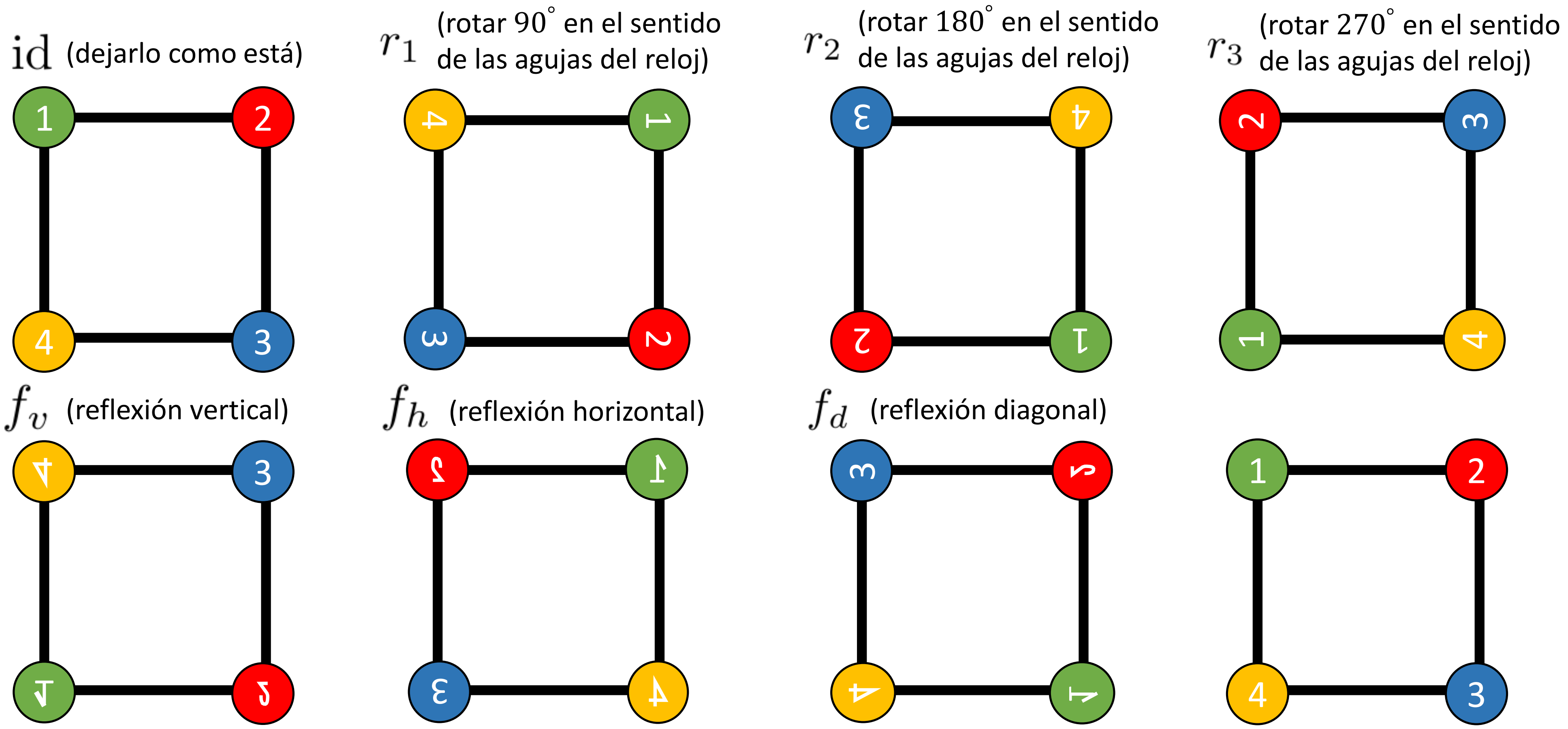




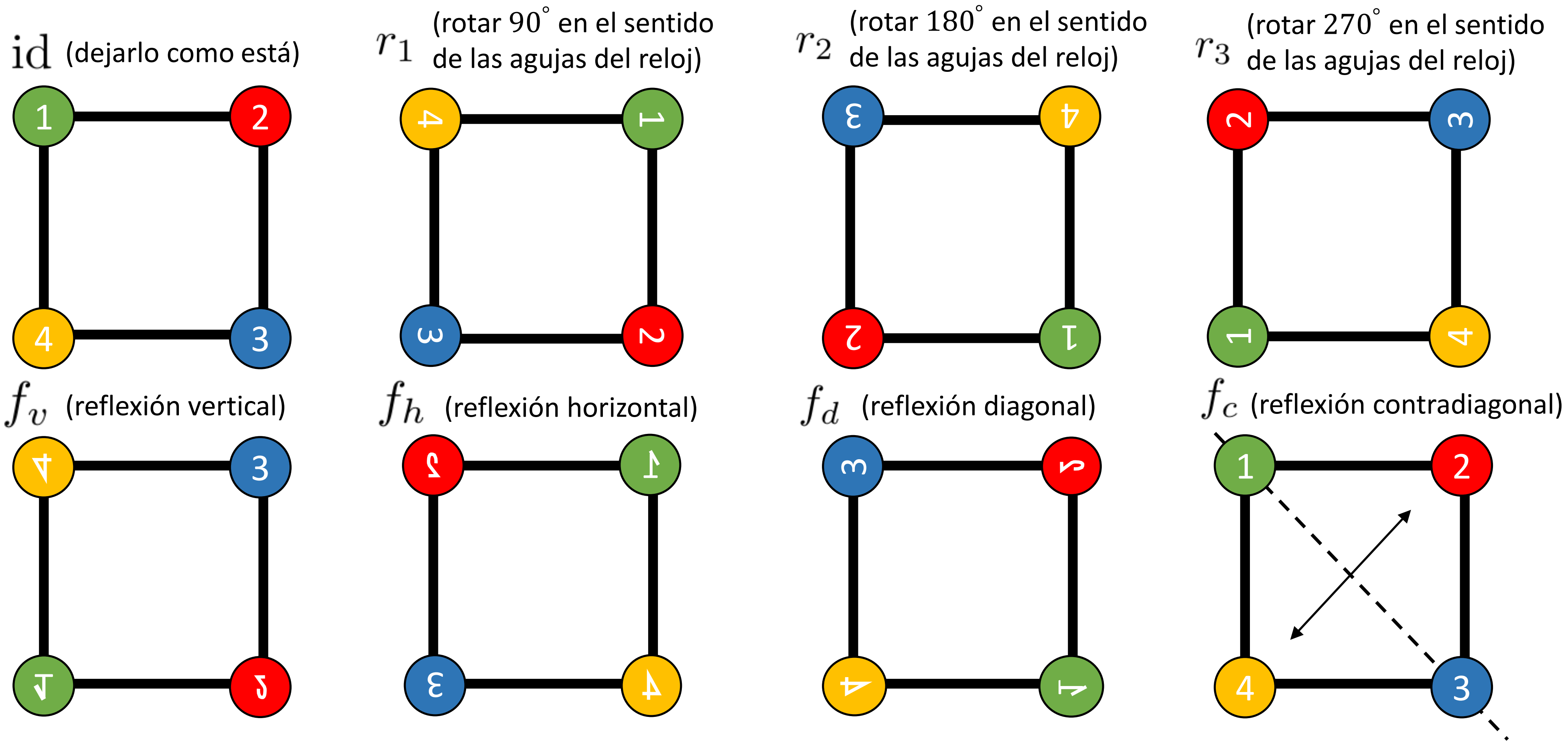
Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.



Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

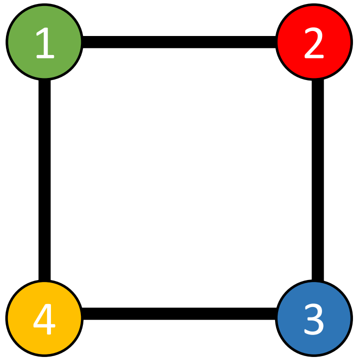


Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

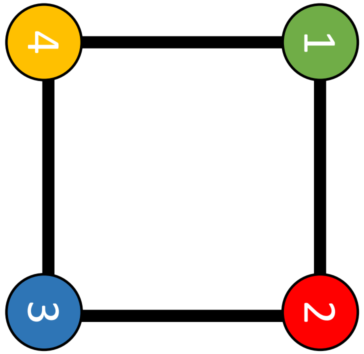


Toda figura es congruente consigo misma, sin embargo algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma.

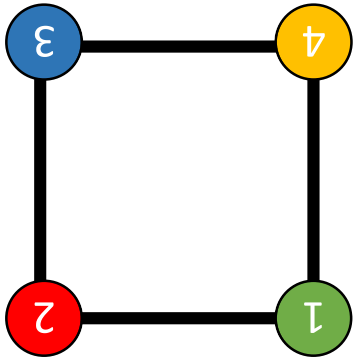
id (dejarlo como está)



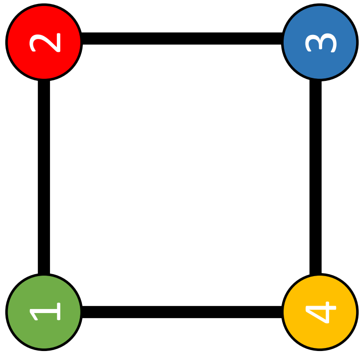
r_1 (rotar 90° en el sentido de las agujas del reloj)



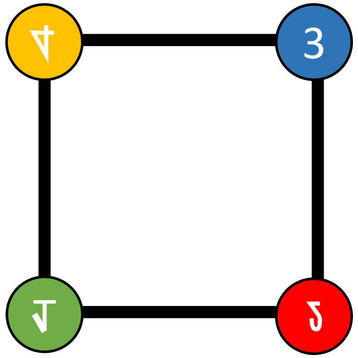
r_2 (rotar 180° en el sentido de las agujas del reloj)



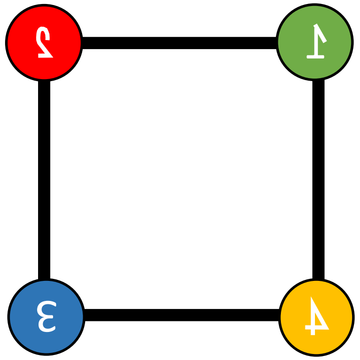
r_3 (rotar 270° en el sentido de las agujas del reloj)



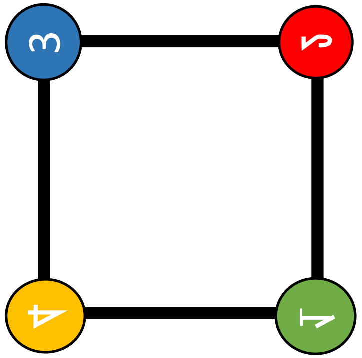
f_v (reflexión vertical)



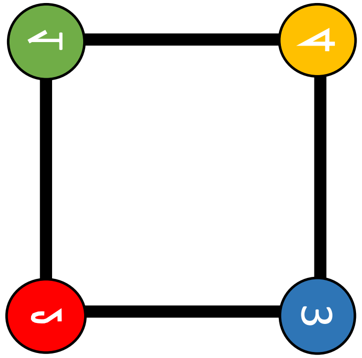
f_h (reflexión horizontal)



f_d (reflexión diagonal)

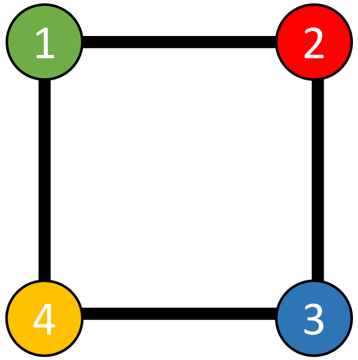


f_c (reflexión contradiagonal)

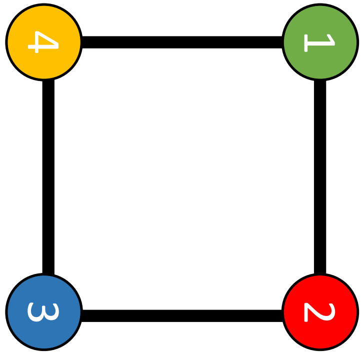


Consideremos $G = \{\mathrm{id}, r_1, r_2, r_3, f_v, f_h, f_d, f_c\}$ el conjunto de simetrías del cuadrado y como operación la composición de simetrías. Se puede comprobar que se trata de un grupo

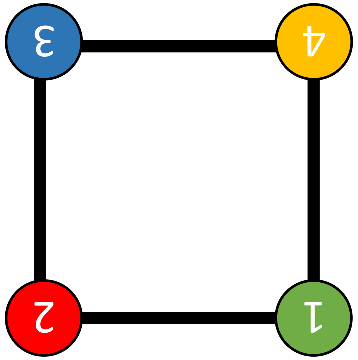
id (dejarlo como está)



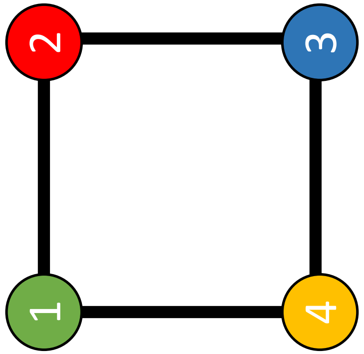
r_1 (rotar 90° en el sentido de las agujas del reloj)



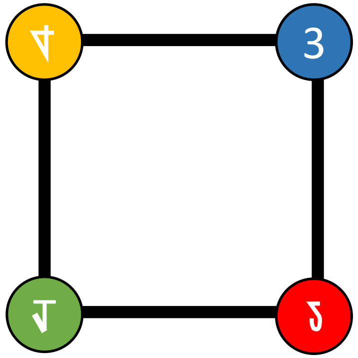
r_2 (rotar 180° en el sentido de las agujas del reloj)



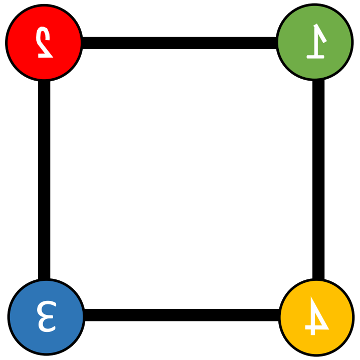
r_3 (rotar 270° en el sentido de las agujas del reloj)



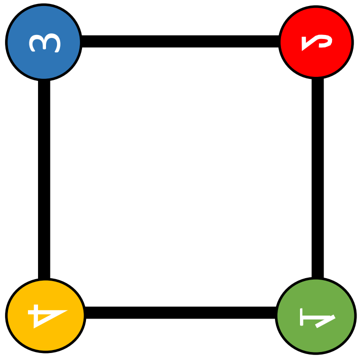
f_v (reflexión vertical)



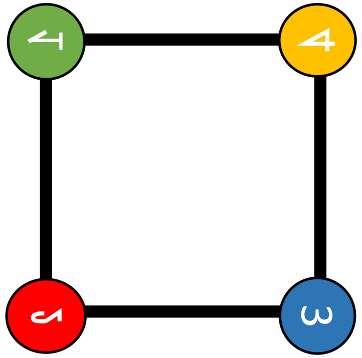
f_h (reflexión horizontal)



f_d (reflexión diagonal)



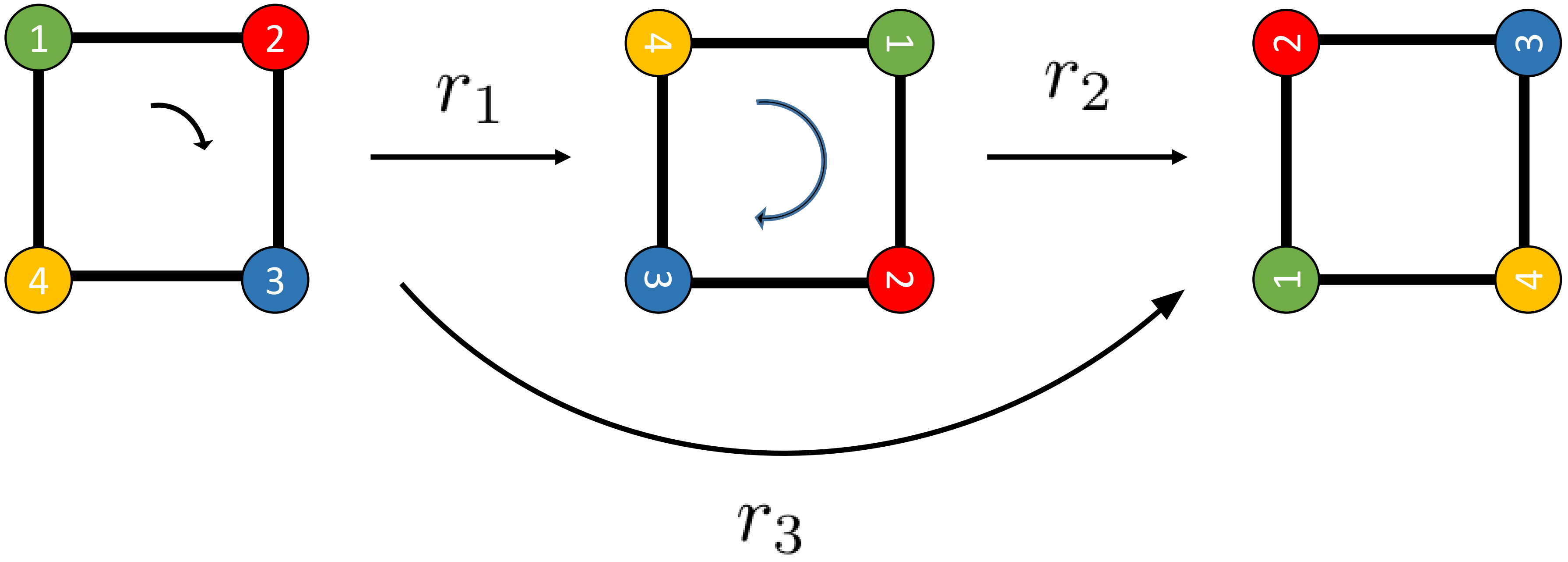
f_c (reflexión contradiagonal)



Consideremos $G = \{\mathrm{id}, r_1, r_2, r_3, f_v, f_h, f_d, f_c\}$ el conjunto de simetrías del cuadrado y como operación la composición de simetrías. Se puede comprobar que se trata de un grupo

$$r_2 \circ r_1 = r_3$$

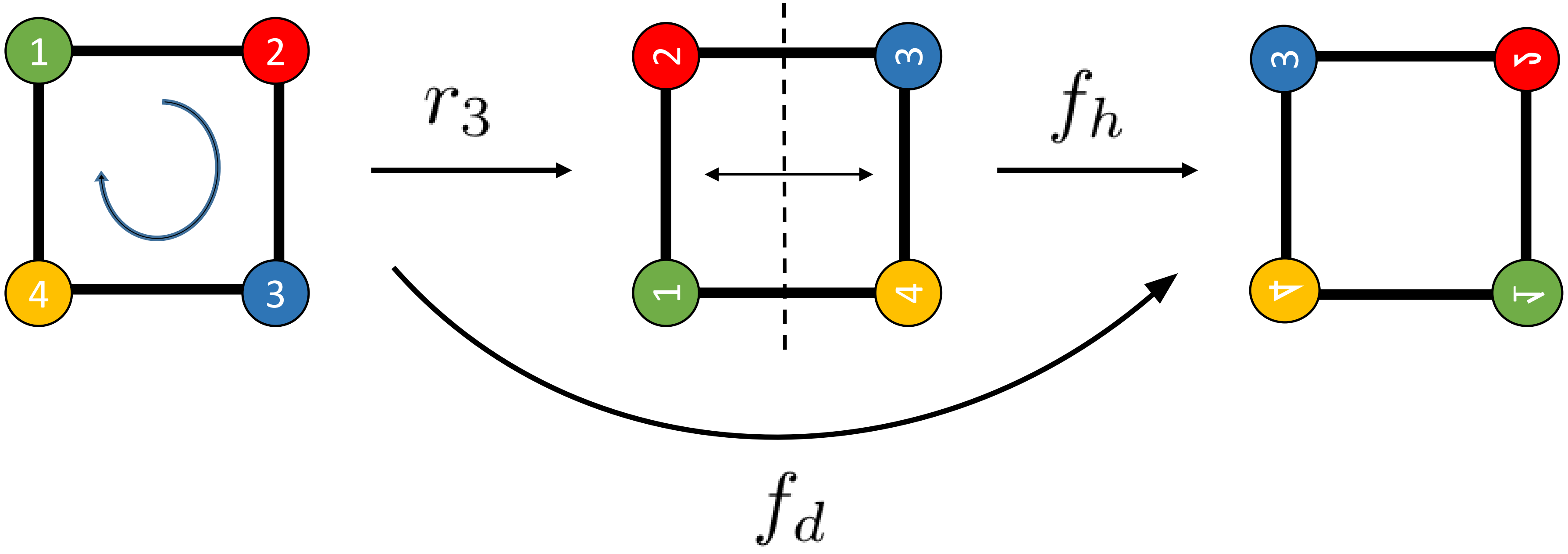
Es fácil comprobar que la composición de rotaciones es siempre una rotación



Consideremos $G = \{\mathrm{id}, r_1, r_2, r_3, f_v, f_h, f_d, f_c\}$ el conjunto de simetrías del cuadrado y como operación la composición de simetrías. Se puede comprobar que se trata de un grupo

$$f_h \circ r_3 = f_d$$

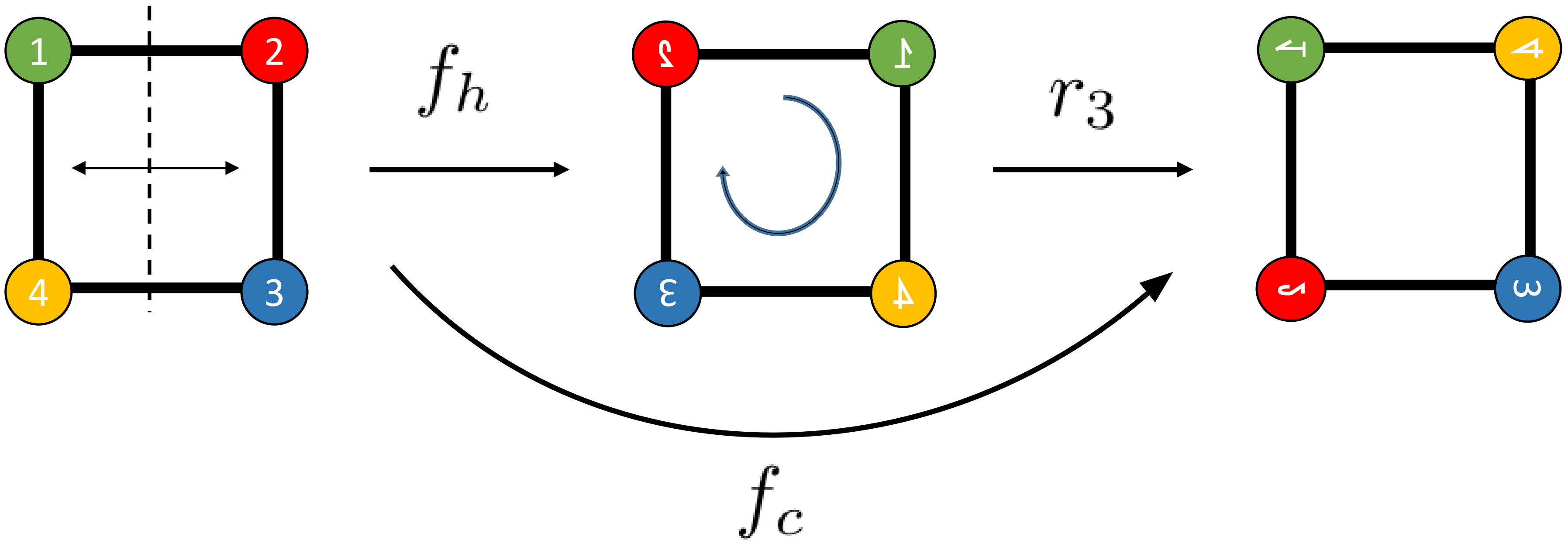
La rotación de 270° seguida de la reflexión horizontal es igual a la reflexión diagonal.



Consideremos $G = \{\mathrm{id}, r_1, r_2, r_3, f_v, f_h, f_d, f_c\}$ el conjunto de simetrías del cuadrado y como operación la composición de simetrías. Se puede comprobar que se trata de un grupo

$$r_3 \circ f_h = f_c$$

¡Sin embargo la reflexión horizontal seguida de la rotación de 270° es la reflexión CONTRADIAGONAL!



Consideremos $G = \{\mathrm{id}, r_1, r_2, r_3, f_v, f_h, f_d, f_c\}$ el conjunto de simetrías del cuadrado y como operación la composición de simetrías. Se puede comprobar que se trata de un grupo

$\circ$	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	f_d	$\boxed{f_c}$	f_h	f_v
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
f_h	f_h	f_c	f_v	$\boxed{f_d}$	r_2	id	r_3	r_1
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

Podemos calcular todas las composiciones y escribir la “tabla de multiplicar” de la operación composición de simetrías

$$f_h \circ r_3 = f_d$$
$$r_3 \circ f_h = f_c$$

¡El orden de los factores si altera el producto en algunos grupos!

Un grupo $\boldsymbol{G}$ que verifica que el orden en que realicemos la operación no altera el resultado, esto es: $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}$ para cualesquiera $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}$ se dice que es un grupo CONMUTATIVO o grupo ABELIANO.

$\circ$	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
f_h	f_h	f_c	f_d	f_d	r_2	id	r_3	r_1
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

Podemos calcular todas las composiciones y escribir la "tabla de multiplicar" de la operación composición de simetrías

$$f_h \circ r_3 = f_d$$

$$r_3 \circ f_h = f_c$$